3 條件機率與獨立事件

3-1 條件機率

在樣本空間中，某事件發生與否，可能會改變其它事件發生的機率，「條件機率」就是在探討這個前後的變化。簡單來說，「條件機率」就是把樣本空間縮小再求機率，所以說，訊息掌握得愈完整，所求的機率就會更加精確。

1 條件機率

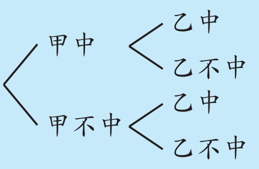
1. **機率的符號與定義（複習）**：隨機試驗的所有可能結果形成的集合，稱為「樣本空間」，記為 S。樣本空間 S 的子集合稱為「事件」，若隨機試驗的操作結果為事件 E 的元素之一，就稱「事件 E 發生」，若 S 的每個元素發生機會都一樣大，則事件 E 發生的機率為 $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}$，即 E 與 S 之元素個數的比值。
2. **條件機率的符號與定義**：樣本空間 S 有兩事件 A 與 B，在事件 B 已經發生的條件下，將事件 A 發生的機率記為 $P(A\,|\,B)$，為方便讀作「機率 A 條件 B」。若每個樣本發生的機會均等，則 $P(A\,|\,B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$，分子分母同除以 $n(S)$ 得 $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，以此作為條件機率的定義，意思就是「把樣本空間由 S 縮小為 B」。

   注意 $P(A\,|\,B)$ 也可解釋為「隨機試驗重新操作直到 B 事件發生為止，求 A 事件的發生機率」。學習機率可幫助我們對隨機試驗進行事前評估與事後猜測，條件機率屬於後者。

2 乘法法則、分割與貝氏定理

1. **條件機率的乘法法則**：把條件機率的定義移項得 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B\,|\,A)$，並可推導出一般情形，如 $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)\cdot P(C\,|\,A\cap B)$。常用此原理來求事件同時發生的機率。
2. **樣本空間的分割**：像事件 A 與 A' 恰把樣本空間 S 分成兩塊不重疊的區域，這就是一種「分割」。正式地說，若事件 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 的聯集為 S，且兩兩的交集為空集合，就稱 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 為 S 的分割，此時，任一事件 B 也跟著被 $A_1\sim A_n$ 分割，所以 B 的發生機率為 $P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$。解題時，常用樹狀圖或集合圖分類討論，其實就是對樣本空間進行分割。

   例 甲、乙、丙三人依序抽獎，每人取後不放回，則甲、乙中獎與否會影響丙的中獎機率，所以先將樣本空間分割成四種情形，如下：



樹狀圖

甲中且乙中	甲中且乙不中
甲不中且乙中	甲不中且乙不中

集合圖

3. **貝氏定理**：若 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 是樣本空間 S 的分割，則由定義可推知

   $P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$

   $\quad=P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\,|\,A_n)$，所以

   $$P(A_i\,|\,B)=\frac{P(A_i)P(B\,|\,A_i)}{P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\,|\,A_n)}。$$

   注意 上面的式子不用背，遇到問題時畫個樹狀圖或集合圖，分類討論就可以解決。貝氏定理的題目都很長，請同學不要被嚇到。
4. **摸彩原理**：若干人依序排隊摸彩，取後不放回，在摸彩活動尚未進行之前，可計算得知每個人中獎的機率都一樣大，無論誰先誰後。

3-2 獨立事件

如果先丟銅板，再擲骰子，那麼點數出現的機率會被銅板的正反面影響嗎？顯然不會，像這種互不相干的事件，就是兩者獨立最明顯的例子。獨立事件的定義是由條件機率而來，相當符合我們的直覺，是常見而實用的概念。

1 獨立事件的定義及性質

1. **兩事件互相獨立**：事件 A 與 B，若不管 B 是否發生，A 的機率都不受影響，即 $P(A\,|\,B)=P(A)$，則稱「A 與 B 為獨立事件」，可推得 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，把這個式子當成兩事件獨立的定義。

   注意 更清楚地說「獨立事件」就是彼此不相干、互不影響，如多人打靶、先擲骰再取球、活到 70 歲、考試猜答⋯等等。有時候事件之間的連帶影響相當模糊，難以估算，也直接視為互相獨立。
2. **相關事件**：若兩事件彼此並非獨立，則稱兩事件為「相關事件」。
3. 若 A 與 B 互為獨立事件，則由定義可證得 A 與 B'、A' 與 B、A' 與 B' 也都互為獨立事件。
4. **三事件互相獨立**：樣本空間中有三個事件 A、B、C，若兩兩之間都互相獨立，而且 $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$，則稱「此三個事件為獨立事件」。上述的條件缺一不可。

   注意 A、B、C 兩兩獨立並不能保證 A、B、C 為獨立事件。
5. **列聯表的獨立**：將成員依兩種屬性分成四個區塊，例如「性別」與「及格」的人數如右表。若人數分布滿足 $a:b=c:d$，則可推得任取一人「是男生」與「有及格」為獨立事件，此時稱這兩種屬性互相獨立。

	男	女
及格	a	c
不及格	b	d

6. **重複試驗**：同一個試驗重複施行幾次，前後互不影響，稱為「重複試驗」。因為各次試驗互相獨立，所以直接相乘即可計算事件的機率。如擲一骰子 n 次，皆為 6 點的機率為 $(\frac{1}{6})^n$。
7. **主觀機率**：許多試驗無法重複操作，只能依靠個人的經驗對事件的機率進行主觀判斷，但仍需依循機率的性質。

   例 降雨機率、錄取機率、財經走勢等等。
8. **客觀機率**：可重複進行並累積大量統計數據的隨機試驗，事件的機率會隨試驗操作次數的增加，進而趨近某個定值，稱為機率的大數法則。

   例 擲銅板、丟骰子、取球等等。