2 空間中的平面與直線

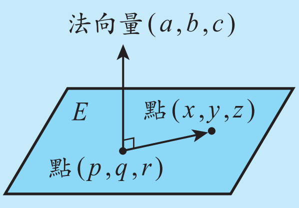
2-1 空間中的平面

這一節要介紹空間的平面方程式，形式上和平面的直線方程式很類似，只是多了 z 項罷了。最重要的是法向量的觀念，一般說來，只要提到平面就馬上想到法向量，準沒錯！

1 平面方程式

1. **平面的法向量**：凡是與平面垂直的非零向量，均稱為該平面的法向量，有兩個方向，大小可以變動，所以不唯一。若有兩個向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 與平面平行，且 $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$，則法向量即為 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的公垂向量，可利用外積得 $\vec{a}\times\vec{b}$ 即為平面的法向量。

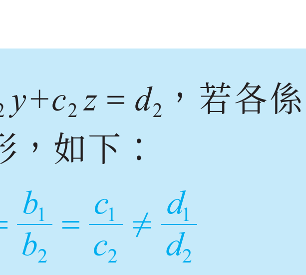
2. **推導平面方程式**：空間中，若平面 E 通過定點 (p,q,r)，法向量為 (a,b,c)，則平面 E 上任何一點 (x,y,z)，皆滿足 $(x-p,y-q,z-r)\perp(a,b,c)$，由內積為 0 得平面 E 的方程式為 $a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0$；反之，滿足此方程式的點 (x,y,z) 必在該平面 E 上。



3. **標準式**：實數 a、b、c、d，其中 a、b、c 不全為 0，則三元一次方程式 $ax+by+cz=d$ 的圖形在空間坐標中為一個平面，且係數所成的空間向量 (a,b,c) 即為平面的法向量。例如 $x+2y-z=3$、$2x+y=1$、$y=2$ 都是平面。

4. **缺項的平面方程式**：在坐標平面上 $3x=2$ 的圖形是垂直 x 軸的直線，在坐標空間中 $3x=2$ 的圖形則是垂直 x 軸的平面。換個方式來說，平面方程式若缺 x 項則圖形平行 x 軸，缺 y 項則平行 y 軸，缺 z 項則平行 z 軸。

5. **截距式**：一個不經原點的平面，與三坐標軸交於 $(p,0,0)$、$(0,q,0)$、$(0,0,r)$，則稱 p、q、r 分別為 x 截距、y 截距與 z 截距，該平面方程式可寫成 $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$，稱為截距式。



2 兩平面的關係與點面距公式

1. **兩平面的關係**：平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 與 E_2：$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，若各係數均不為 0，則由係數的比值判定兩平面的關係，有三種情形，如下：

   (1)兩面重合 $\Leftrightarrow$ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$　(2)兩面平行 $\Leftrightarrow$ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$

   (3)兩面相交 $\Leftrightarrow$ $(a_1,b_1,c_1)\not\parallel(a_2,b_2,c_2)$，即法向量 $\vec{n_1}$ 與 $\vec{n_2}$ 不平行。

   注意 若對應係數均為 0 則不用寫出，如 $2x+3z=0$ 與 $4x+6z=0$ 是兩面重合，而 $2x+3z=0$ 與 $4x+6z=1$ 是兩面平行。

2. **兩平面的交角**：若兩平面交於一直線，則有銳夾角與鈍夾角，兩者互補，可由兩個平面的法向量 $\vec{n_1}$ 與 $\vec{n_2}$ 求夾角的餘弦值，即 $\cos$ 夾角 $=\pm\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\times|\vec{n_2}|}$。

3. **點面距**：空間坐標中，點 $K(p,q,r)$ 到平面 E：$ax+by+cz=d$ 的最近距離為 $d(K,E)=\frac{|ap+bq+cr-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。若點 K 在法向量 (a,b,c) 所指的半空間區域內，則 $ap+bq+cr-d>0$；反之，則 $ap+bq+cr-d<0$。

4. **兩平行平面求間距**：兩平行平面 E_1：$ax+by+cz=d_1$ 與 E_2：$ax+by+cz=d_2$ 之間的距離為 $d(E_1,E_2)=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，要先確認一次項係數對應相等才可以代這個公式，若不使用間距公式，可在 E_1 上任找一點 P，求 P 到 E_2 的距離即可。

5. **角平分面**：若平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 與 E_2：$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ 交於一直線，其銳、鈍兩交角的角平分面方程式為 $\frac{|a_1x+b_1y+c_1z-d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2z-d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$。

6. **平面系方程式**：兩平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 與 E_2：$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ 交於直線 L，則過 L 的平面有無限多個，可表為 $(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+k(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)=0$，稱為過 L 的平面系，其實就是隨 k 值繞 L 旋轉的動平面。記為 $E_1+kE_2=0$。

   注意 平面系 $E_1+kE_2=0$ 可表示過交線 L 的平面，但無法消去 E_1 表示 E_2，若改為 $kE_1+E_2=0$ 則可以表示 E_2，但無法表示 E_1。

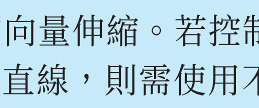
2-2 空間中的直線方程式

利用向量平行，可以把直線上的動點表示成參數式，是解決空間中直線問題的利器，比例式與兩面式只是進一步的變形。這個單元把點、線、面整合起來，題目多變且想法細膩，解題常需大量的運算，請同學狂練題目，務求精熟準確。

1 直線的參數式、比例式與兩面式

1. **方向向量**：在空間中，與直線 L 平行的非零向量，稱為 L 的方向向量，習慣記為 $\vec{d}$，不唯一，可以伸縮或反向。

2. **直線的參數式**：空間中以 $P(x_0,y_0,z_0)$ 為起點，方向向量為 $\vec{d}=(a,b,c)$ 的直線 L 恰有一條，直線 L 上任一點 $Q(x,y,z)$ 使 $\overrightarrow{PQ}\parallel\vec{d}$ 成立，即 $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\parallel(a,b,c)$，所以可找到實數 t 使得 $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t(a,b,c)$，進一步寫成 $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$，$t\in R$，稱為直線 L 的參數式，即常數項為起點，t 的係數為方向向量。



   注意 同一直線的參數式寫法有無限多種，可改變起點或把方向向量伸縮。若控制參數 t 的範圍可使直線變成線段或射線。若題目提到兩條直線，則需使用不同的參數符號避免混淆，習慣採用 t 與 k。

3. **直線的比例式**：空間中以 $P(x_0,y_0,z_0)$ 為起點，方向向量為 $\vec{d}=(a,b,c)$ 的直線 L 恰有一條，L 上任一點 $Q(x,y,z)$ 使 $\overrightarrow{PQ}\parallel\vec{d}$ 成立，即 $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\parallel(a,b,c)$，若 a、b、c 均不為 0，則由分量比值相等得 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$，稱為直線 L 的比例式，又稱對稱式，令分子為 0 可得起點坐標，分母即為 L 的方向向量。一般題目都寫成比例式，比較節省空間。

   注意 比例式的 x、y、z 係數必須是 1，如直線 $\frac{2x-3}{4}=\frac{-y-1}{3}=\frac{z}{2}$ 的方向向量不是 $(4,3,2)$，而是 $(2,-3,2)$，小心陷阱！

4. **直線的兩面式**：若兩平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 與 E_2：$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ 相交於一直線 L，則可將直線 L 寫成 E_1 與 E_2 的聯立，即 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases}$，稱為 L 的兩面式。將兩平面的法向量外積，即可得直線 L 的方向向量。可用加減消去法把兩面式化為參數式。

   注意 若兩面平行，則聯立的兩面式會無解，如 $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y+z=2\end{cases}$ 為無圖形。

2 空間中直線與點、線、面的關係

1. **直線與平面的關係**：空間中直線 L 的方向向量為 $\vec{d}$，平面 E 的法向量為 $\vec{n}$，L 與 E 的相交情形有三種：

   (1)若 $\vec{d}$ 與 $\vec{n}$ 不垂直 $\Leftrightarrow$ L 與 E 相交於一點，可求交點坐標。
   特別地，若 $\vec{d}\parallel\vec{n}$，則 L 與 E 垂直。

   (2)若 $\vec{d}$ 與 $\vec{n}$ 垂直，則 L 與 E 為線面平行或線在平面上，可在直線 L 上任取一點代入平面 E 看是否成立，來判斷是哪一種情形。

2. **點與直線的關係**：空間中點 P 與直線 L，可利用「配方」求距離的最小值或「內積為 0」求最近距離與垂足點坐標，詳見範例。

3. **兩直線的關係**：空間中兩相異直線 L_1 與 L_2 的關係有三種：

   (1) L_1 與 L_2 平行：若方向向量 $\vec{d_1}$ 與 $\vec{d_2}$ 互相平行，則 $L_1\parallel L_2$，可求兩線的間距。

   (2) L_1 與 L_2 相交：L_1 的參數用 t，L_2 的參數用 k，先使 x 坐標相等與 y 坐標相等，解出 t、k 的聯立方程，再代回確定 z 坐標也相等，即得兩線的交點。

   (3) L_1 與 L_2 歪斜：先設兩線的公垂線垂足點，利用內積為 0 解聯立，可求出兩個垂足坐標。若直接求歪斜線的最近距離，可先求含 L_1 且平行 L_2 的平面 E，再求 L_2 到 E 的距離即可。