

# 單元 7 條件機率與貝氏定理

# 7 條件機率與貝氏定理

醫院統計某地區成人的健康檢查資料

體重過重的占45%，有脂肪肝的占30%

今任選一成年人，已知此成年人的體重過重，  
那麼他也有脂肪肝的機率還會是30%嗎？

「在某事件發生的條件下，求另一事件發生的機率」  
是本單元的重點。



## 甲、條件機率

第二冊學過：一項試驗中所有可能發生的結果所成的集合，稱為這個試驗的樣本空間(通常以集合  $S$  表示) 樣本空間  $S$  的任一子集都稱為一個事件。若  $S$  中每個樣本點出現的機會均等，則事件  $A$  發生的機率為

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

其中  $n(S)$  與  $n(A)$  分別為  $S$  及  $A$  的樣本點個數。

例如：擲一粒公正骰子一次，其樣本空間為  $\{1,2,3,4,5,6\}$

因為擲出點數大於3的事件為  $\{4,5,6\}$ ，所以擲出點數

大於3的機率為  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。但「在擲出點數為偶數的條件下」

擲出點數大於3的機率還會是  $\frac{1}{2}$  嗎？我們說明如下。

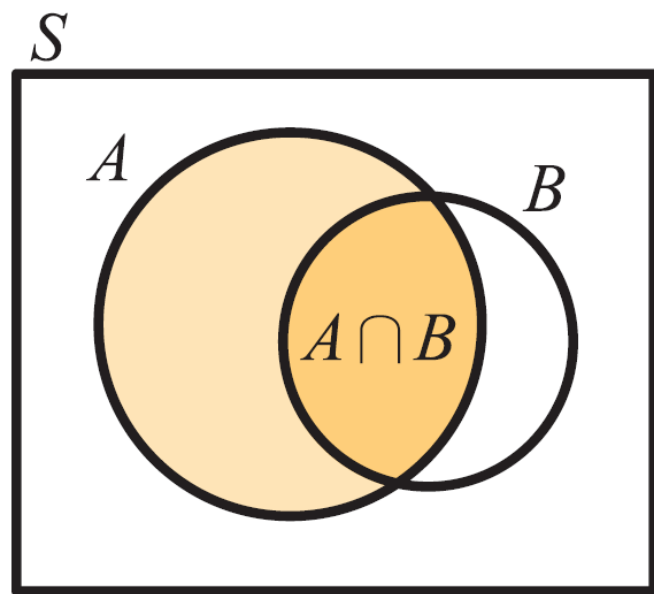
一般而言，我們把「在事件A發生的條件下，事件B發生的機率」，稱為**條件機率**，記作 $P(B|A)$ 。

利用「 $A \cap B$ 在A中所占的比例」的算法可知：在事件A發生的條件下，事件B發生的機率為

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

再將分子與分母同時除以 $n(S)$ ，得

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



將以上內容整理如下。

## 條件機率

當 $A, B$ 為兩事件且 $P(A) > 0$ 時，將「在事件 $A$ 發生的條件下，事件 $B$ 發生的機率」稱為條件機率以符號  $P(B|A)$  表示，也就是

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

符號  $P(B|A)$  讀作「在 $A$ 發生的條件下， $B$ 發生的機率」。

## 例題

1. 擲一粒公正骰子一次。在出現點數為質數的條件下，求擲出點數小於5的機率。

一副撲克牌共有 52 張，從中隨機抽取一張。在抽到花色為紅心的條件下，求抽到點數為 6 的機率。

解：

設  $A$  表示抽到花色為紅心的事件，

$B$  表示抽到點數為 6 的事件。

依題意，得  $n(A) = 13$  且  $n(A \cap B) = 1$

故在  $A$  發生的條件下， $B$  發生的機率為

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{13}$$

符號  $P(B|A)$  與  $P(A|B)$  的意義不同，不可混淆，舉例如下。

## 例題

2. 某班的學生中，有 28 人會游自由式，有 20 人會游仰式，有 12 人兩式都會。

今從班上任選一學生，試回答下列問題

- (1) 已知此學生會游自由式，求他也會游仰式的機率
- (2) 已知此學生會游仰式，求他也會游自由式的機率

班上某日午餐的訂購中，有 30 人訂購炒飯，有 18 人訂購飲料，有 12 人兩者都訂購。今從班上任選一學生，試回答下列問題

- (1) 已知此學生訂購炒飯，求他也訂購飲料的機率
- (2) 已知此學生訂購飲料，求他也訂購炒飯的機率

解：

設  $A$  表示選出者訂購炒飯的事件，

$B$  表示選出者訂購飲料的事件

依題意，得  $n(A)=30, n(B)=18, n(A \cap B)=12$

(1) 在  $A$  發生的條件下， $B$  發生的機率為

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

班上某日午餐的訂購中，有 30 人訂購炒飯，有 18 人訂購飲料，有 12 人兩者都訂購。今從班上任選一學生，試回答下列問題

- (1) 已知此學生訂購炒飯，求他也訂購飲料的機率
- (2) 已知此學生訂購飲料，求他也訂購炒飯的機率

解：

設  $A$  表示選出者訂購炒飯的事件，

$B$  表示選出者訂購飲料的事件

依題意，得  $n(A)=30, n(B)=18, n(A \cap B)=12$

(2) 在  $B$  發生的條件下， $A$  發生的機率為

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

## 例題

3. 醫院統計某地區成人的健康檢查資料：體重過重者占 45%，有脂肪肝者占 30%，兩者都有的占 25%。今任選一位成年人，試回答下列問題：
- (1) 已知此人體重過重，求他也有脂肪肝的機率。
  - (2) 已知此人有脂肪肝，求他體重**沒有**過重的機率。

在訂購校慶紀念商品中，有 $\frac{2}{3}$ 的人買馬克杯，有 $\frac{4}{5}$ 的人買徽章，有 $\frac{1}{2}$ 的人兩種都買。今任選一人，試回答下列問題：

- (1) 已知此人買馬克杯，求他也買徽章的機率。
- (2) 已知此人沒有買徽章，求他也沒有買馬克杯的機率。

解：

設 $A$ 表示有買馬克杯的事件， $B$ 表示有買徽章的事件  
依題意，得  $P(A) = \frac{2}{3}$ ， $P(B) = \frac{4}{5}$ ， $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

(1) 在 $A$ 發生的條件下， $B$ 發生的機率為

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

在訂購校慶紀念商品中，有 $\frac{2}{3}$ 的人買馬克杯，有 $\frac{4}{5}$ 的人買徽章，有 $\frac{1}{2}$ 的人兩種都買。今任選一人，試回答下列問題：

- (1) 已知此人買馬克杯，求他也買徽章的機率。
- (2) 已知此人沒有買徽章，求他也沒有買馬克杯的機率。

解：

(2) 因為 $A$ 的補集 $A'$ 表示沒有買馬克杯的事件， $B$ 的補集 $B'$ 表示沒有買徽章的事件，且

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{30}$$

故在 $B'$ 發生的條件下， $A'$ 發生的機率為

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{\frac{1}{30}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{6}$$

當兩事件 $A$  與 $B$  同時發生時，我們該如何求這兩個事件同時發生（即 $A \cap B$ ）的機率呢？

由條件機率  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  可以得到

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

上式稱為**條件機率的乘法定理**，它的意思是：兩事件 $A$  與 $B$  同時發生的機率 $P(A \cap B)$  等於

「 $A$ 發生的機率」乘上「在 $A$ 發生的條件下， $B$ 發生的機率」

4. 某人手機內存有歌曲共 8 首，其中 5 首為爵士樂，另外 3 首為抒情歌。今隨機播放歌曲，播過的歌不再播放，設每首歌被播放的機率都相等，求下列各事件的機率：
- (1) 第一首與第二首都播到爵士樂。
  - (2) 第一首播到爵士樂，但第二首播到抒情歌。

# 例題



## 例題

5. 籤筒的 10 支籤中 3 支有獎。甲、乙兩人依序各抽一支籤，且抽完後不放回。設每支籤被抽到的機率都相等，求下列各事件的機率：
- (1) 甲中獎。 (2) 乙中獎。



戳戳樂遊戲盒的 12 格中 5 格有獎。甲、乙兩人依序任意各戳 1 格，求下列各事件的機率：



- (1) 甲、乙兩人都中獎。
- (2) 甲中獎，但乙未中獎。

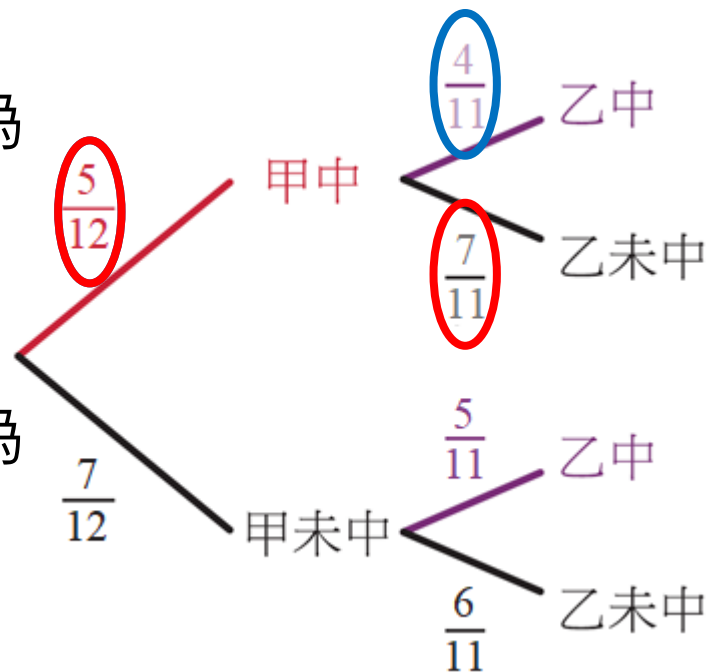
**解：** 將甲、乙中獎的情形及其機率以樹狀圖呈現如圖  
由樹狀圖得知

(1) 甲、乙兩人都中獎的機率為

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$$

(2) 甲中獎但乙未中獎的機率為

$$\frac{5}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{132}$$



## 乙、獨立事件

條件機率告訴我們，一事件的發生與否，可能改變另一事件發生的機率，但是也有不互相影響的例子。  
例如：甲、乙兩人各擲一次公正骰子，並令

$A$  表示「甲擲出6點」的事件，  
 $B$  表示「乙擲出6點」的事件。

顯然地，甲是否擲出6點並不會影響乙擲出6點的機率  
反之亦然。也就是說，這兩個事件並不會互相影響。

## 兩事件獨立的定義

當兩事件 $A$  與 $B$  滿足

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{時，}$$

稱 $A$  與 $B$  為**獨立事件**。

根據上述定義，檢驗兩事件是否獨立。

## 例題

6. 擲一粒公正骰子一次，考慮下列三事件：
- $A$ ：出現奇數點， $B$ ：出現 1 點或 6 點，  
 $C$ ：出現 2 點、3 點或 5 點。
- (1) 試問  $A$  與  $B$  是否為獨立事件？
- (2) 試問  $A$  與  $C$  是否為獨立事件？

丟一枚均勻硬幣三次，考慮下列兩事件：

$A$ ：至少出現兩次正面， $B$ ：三次都同一面。

試問 $A$ 與 $B$ 是否為獨立事件？

解：

根據題意，得

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{C_2^3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

三正 兩正
三正 三反

$$\text{且 } P(A \cap B) = \frac{1}{8} \quad \text{三正}$$

因為 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ，所以 $A$ 與 $B$ 為獨立事件

由兩事件獨立的定義，得知：

兩獨立事件同時發生的機率等於個別機率的乘積。

7. 根據統計：使用新手機後，三年內會換手機的機率為0.8。已知甲、乙兩人同時各使用一支新手機，且兩人換手機與否為獨立事件，求三年內
- (1) 兩人都換手機的機率。
  - (2) 至少有一人換手機的機率。

已知兩事件 $A$ 與 $B$ 為獨立事件，且  $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$   
求 (1) $P(B)$ 。(2) $P(B|A)$ 。

解：

(1) 利用機率的性質，且 $A$ 與 $B$ 為獨立事件，得

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B)\end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2}P(B) \quad , \quad \text{解得 } P(B) = \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

當 $A$  與 $B$  為獨立事件時， $A$  與 $B'$  也為獨立事件，證明如下

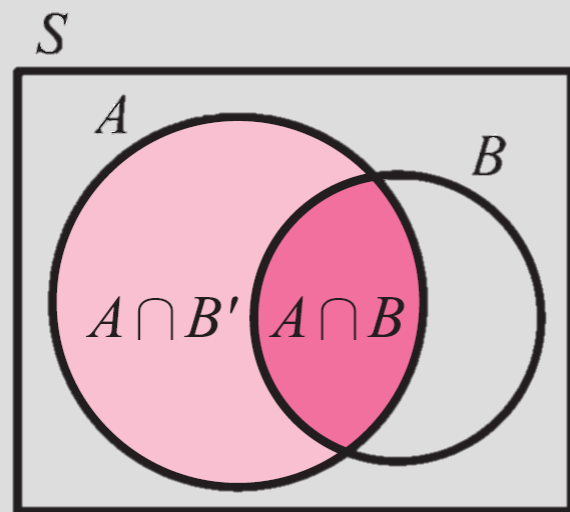
因為 $A$  與 $B$  為獨立事件，所以  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ，且

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)(1 - P(B))$$

$$= P(A)P(B')$$



即 $A$  與 $B'$  也為獨立事件。

同理可推得， $A'$  與 $B$  為獨立事件，且 $A'$  與 $B'$  也為獨立事件

## 獨立事件的性質

若 $A$  與 $B$  為獨立事件，則有以下性質：

- (1) 事件 $A'$  與 $B$  為獨立事件。
- (2) 事件 $A$  與 $B'$  為獨立事件。
- (3) 事件 $A'$  與 $B'$  為獨立事件。

8. 設甲、乙射擊的命中率分別為  $\frac{1}{4}$  與  $\frac{1}{5}$ 。已知兩人各射一發，且兩人命中與否為獨立事件，求下列各事件的機率：(1) 兩人都沒命中。(2) 至少有一人命中。

8. 設甲、乙射擊的命中率分別為  $\frac{1}{4}$  與  $\frac{1}{5}$ 。已知兩人各射一發，且兩人命中與否為獨立事件，求下列各事件的機率：(1) 兩人都沒命中。(2) 至少有一人命中。

設甲、乙兩人在罰球線投籃投進的機率分別為0.4與0.2。已知兩人各投一球，且兩人投進與否為獨立事件，求下列各事件的機率：(1) 兩人都投進。(2) 恰有一人投進。

解：

設  $A$  與  $B$  分別表示甲、乙投進的事件。

根據題意，得  $P(A) = 0.4$ ， $P(B) = 0.2$

(1) 因為  $A$  與  $B$  為獨立事件，所以兩人都投進的機率為

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.4 \times 0.2 = 0.08$$

(2) 恰有一人投進的機率為

$$\begin{aligned} P(A \cap B') + P(A' \cap B) &= P(A)P(B') + P(A')P(B) \\ &= 0.4 \times (1 - 0.2) + (1 - 0.4) \times 0.2 = 0.44 \end{aligned}$$

## 例題

9. 甲、乙兩選手參加5戰3勝制(即先勝3盤者贏得比賽)的網球單打比賽。設甲單盤獲勝的機率為 $\frac{3}{4}$ ，且每盤的比賽結果互不影響。已知甲選手前兩盤皆敗，求甲贏得比賽的機率。

甲、乙兩選手參加3戰2勝制(即先勝2局者贏得比賽)的羽球單打比賽。已知甲單局獲勝的機率為  $\frac{2}{3}$ ，

且每局的比賽結果互不影響，求甲贏得比賽的機率。

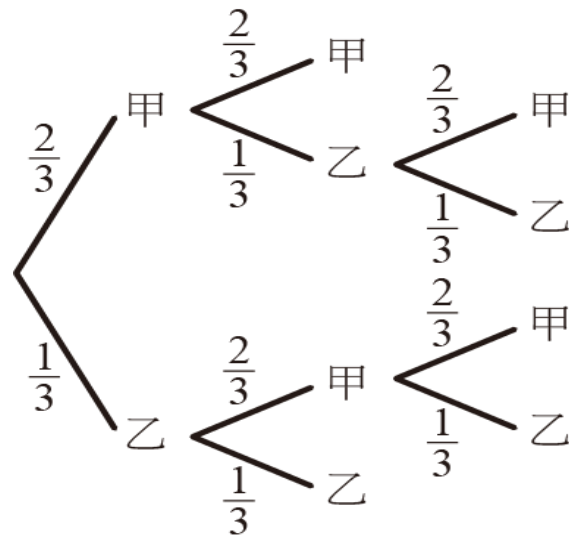
解：

先將甲、乙兩人比賽獲勝的情形及其機率以樹狀圖呈現如右(甲表甲勝，乙表乙勝)

第一局 第二局 第三局

再由樹狀圖，得甲贏得比賽的機率為

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$$



當遇到比賽因故中止且不再比賽的狀況時，該如何來分配比賽的獎金呢？以例題說明如下。

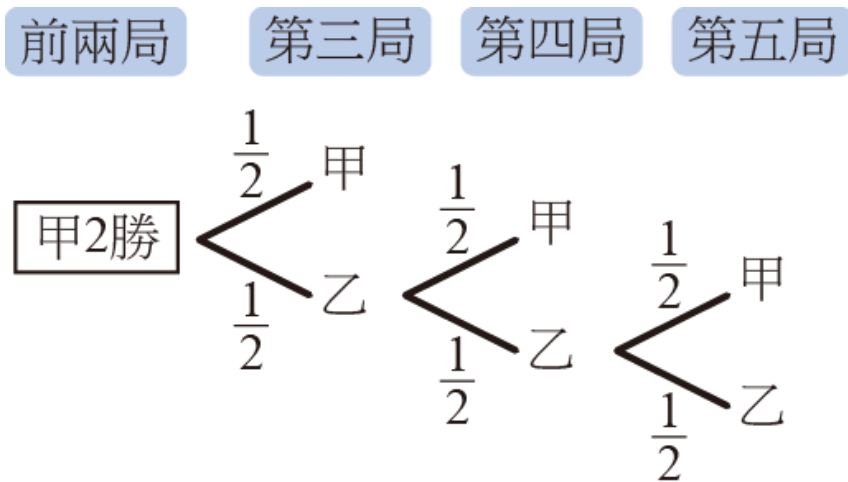
10. 甲、乙兩人比賽桌球(不得和局)，約定先勝 3 局者可得獎金 7200 元。設甲單局獲勝的機率為  $\frac{2}{3}$ ，且每局的比賽結果互不影響。已知當比賽進行至甲勝 2 局、乙勝 1 局時，因故中止且不再比賽，至於獎金的分配，則依若繼續比賽兩人贏得比賽的機率之比例來分配，求甲應分得多少獎金。

# 例題

甲、乙兩人比賽下棋(不得和局)，約定先勝3局者可得獎金1600元。設甲、乙兩人實力相當，且每局的比賽結果互不影響。已知當比賽進行至前2局皆甲勝時，因故中止且不再比賽，至於獎金的分配，則依若繼續比賽兩人贏得比賽的機率之比例來分配，求甲應分得多少獎金。

解：

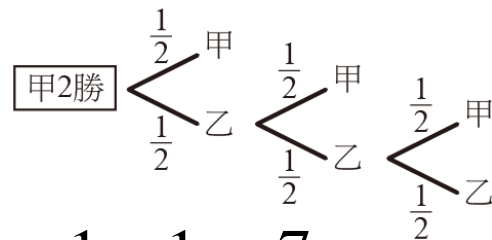
先將甲、乙兩人比賽獲勝的情形及其機率以樹狀圖呈現如下(甲表甲勝，乙表乙勝)



甲、乙兩人比賽下棋(不得和局)，約定先勝3局者可得獎金1600元。設甲、乙兩人實力相當，且每局的比賽結果互不影響。已知當比賽進行至前2局皆甲勝時，因故中止且不再比賽，至於獎金的分配，則依若繼續比賽兩人贏得比賽的機率之比例來分配，求甲應分得多少獎金。

前兩局   第三局   第四局   第五局

解：



再由樹狀圖得知：若繼續比賽，則

(1) 甲贏得比賽的機率為  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

(2) 乙贏得比賽的機率為  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

因此，兩人贏得比賽的機率之比例為7：1。

故甲應分得獎金  $1600 \times \frac{7}{7+1} = 1400$  (元)

## 丙、貝氏定理

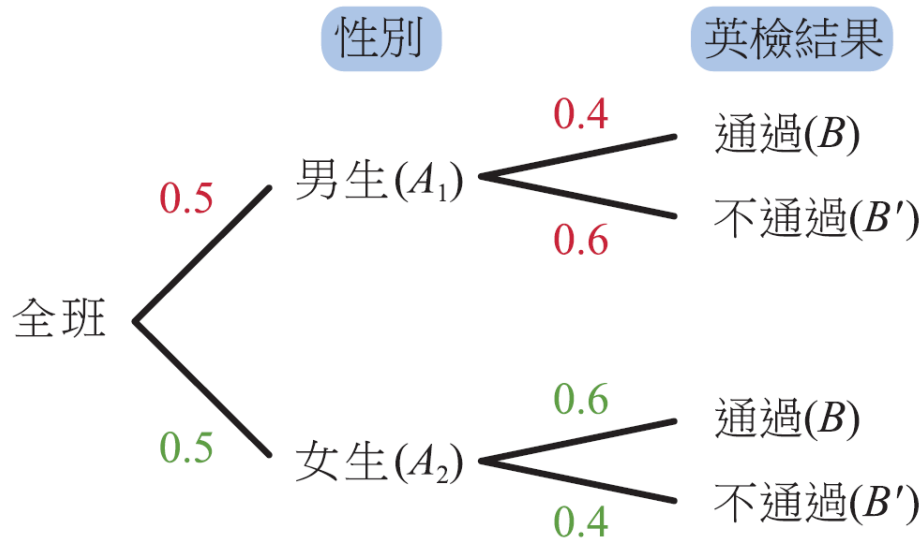
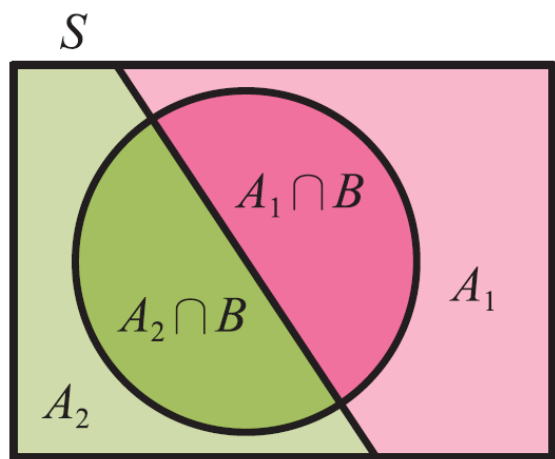
某班男女生人數各半，男生中有40%的人通過英檢，女生中有60%的人通過英檢。班上任選一學生，已知該生通過英檢，那麼此人是女生的機率為多少呢？像這樣的機率問題，是日常生活中經常碰到的情境，我們可設 $A_1$ 表示選出者是男生的事件， $A_2$ 表示選出者是女生的事件， $B$ 表示選出者通過英檢的事件。根據上述可得

$$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = 0.5$$

$$P(B|A_1) = 0.4, P(B|A_2) = 0.6$$

並將這些事件的關係以文氏圖與樹狀圖呈現如下。

## 丙、貝氏定理



由文氏圖或樹狀圖，可得某生通過英檢，此人是女生的機率為

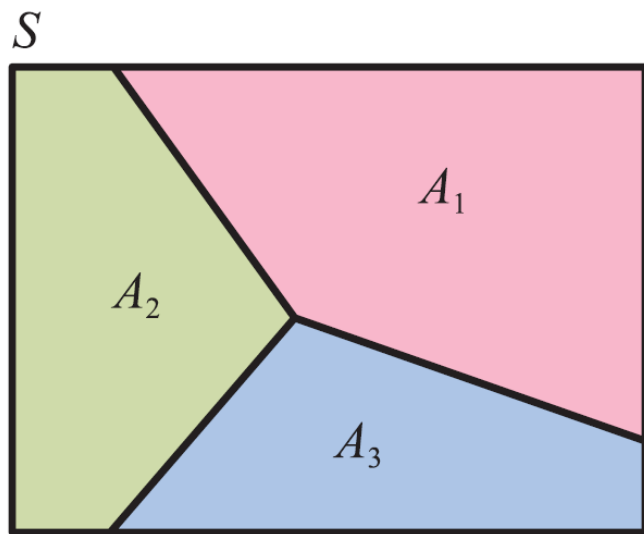
$$\frac{0.5 \times 0.6}{0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6} = \frac{3}{5} = 0.6$$

上述的情境我們雖然是透過文氏圖或樹狀圖求得其機率，然而事實上其背後是有著嚴謹的數學理論支持，稱之為貝氏定理。

## 丙、貝氏定理

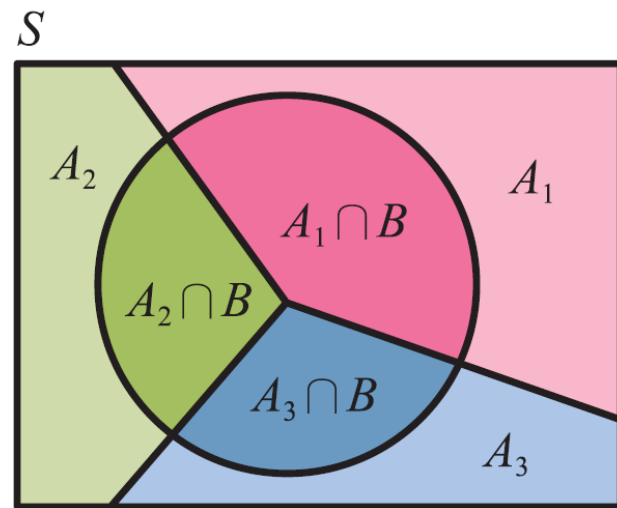
貝氏定理是在十八世紀英國牧師貝斯(R. T. Bayes, 1702~1761)的遺作中發現的，今日已被廣泛的應用，介紹如下。

設 $A_1, A_2, A_3$ 為樣本空間 $S$ 的三個事件，且滿足 $P(A_i) > 0$  ( $i=1,2,3$ )。當這三個事件兩兩互斥且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$ 時我們把 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 稱為樣本空間 $S$ 的一組分割，如下圖



## 丙、貝氏定理

當  $\{A_1, A_2, A_3\}$  為樣本空間  $S$  的一組分割  
且事件  $B$  為  $S$  的一個事件時，事件  $B$  也  
會被分割成  $A_1 \cap B, A_2 \cap B, A_3 \cap B$   
兩兩互斥的三個事件，如右圖所示



因此，事件  $B$  發生的機率就是這三個兩兩互斥事件的  
機率總和，即

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

## 丙、貝氏定理

接下來，我們想知道的是：在事件 $B$ 發生的條件下，

事件 $A_1$ 發生的機率(即  $P(A_1|B)$ )是多少呢？

由條件機率的定義得知

在事件 $B$ 發生的條件下( $P(B)>0$ )，事件 $A_1$ 發生的機率為

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)}$$

## 丙、貝氏定理

利用條件機率的乘法定理，可將上式中的每一個 $P(A_i \cap B)$

分別改寫成 $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i), i = 1, 2, 3$

因此

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

同理，我們也可求得 $P(A_2|B)$ 與 $P(A_3|B)$

擴及一般性，我們可以推得貝氏定理，敘述如下

## 貝氏定理

設  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  為樣本空間  $S$  的一組分割，且  $B$  為  $S$  的任一個事件。若  $P(B) > 0$ ，則在事件  $B$  發生的條件下，事件  $A_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 發生的機率為

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

## 例題

11. 某工廠有甲、乙、丙三台機器，其產量分別占總產量的  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{6}$ ，且依過去的經驗知甲、乙、丙機器生產的產品中分別有6%, 4%, 3%的不良品
- (1) 任選一產品，求該產品為不良品的機率
  - (2) 已知某產品為不良品，求該產品為甲機器所生產的機率

## 例題

11. 某工廠有甲、乙、丙三台機器，其產量分別占總產量的 $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{6}$ ，且依過去的經驗知甲、乙、丙機器生產的產品中分別有6%，4%，3%的不良品
- (1) 任選一產品，求該產品為不良品的機率
  - (2) 已知某產品為不良品，求該產品為甲機器所生產的機率

某校數學模擬考評分後將全校同學依總分由高到低排序：前30%的同學屬於甲組，後20%的同學屬於丙組，其餘的同學屬於乙組。進一步分析同學的答題情形，得到計算題答對率如表。選出所有正確的選項。

	甲組	乙組	丙組
答對率	100%	80%	40%

- (1) 計算題答對的同學，一定屬於甲組
- (2) 計算題答錯的同學，不可能屬於甲組
- (3) 從丙組的同學中任選一人，此人計算題答對的機率為0.4
- (4) 從計算題答對的同學中任選一人，此人屬於乙組的機率大於0.5

解：

- (1) 因為乙組和丙組還是有人答對，故答對者不一定是甲組的
- (2) 因為甲組答對率是100%故答錯的絕對不會是甲組的人
- (3) 從題目可知丙組裡面答對的有40%故機率為0.4

某校數學模擬考評分後將全校同學依總分由高到低排序：前30%的同學屬於甲組，後20%的同學屬於丙組，其餘的同學屬於乙組。進一步分析同學的答題情形，得到計算題答對率如表。選出所有正確的選項。

	甲組	乙組	丙組
答對率	100%	80%	40%

- (1) 計算題答對的同學，一定屬於甲組
- (2) 計算題答錯的同學，不可能屬於甲組
- (3) 從丙組的同學中任選一人，此人計算題答對的機率為0.4
- (4) 從計算題答對的同學中任選一人，此人屬於乙組的機率大於0.5

解：

- (4) 從題目所說的前30%是甲組後20%是丙組，可得知乙組有50%的人，故今天計算題答對中是乙組的機率為

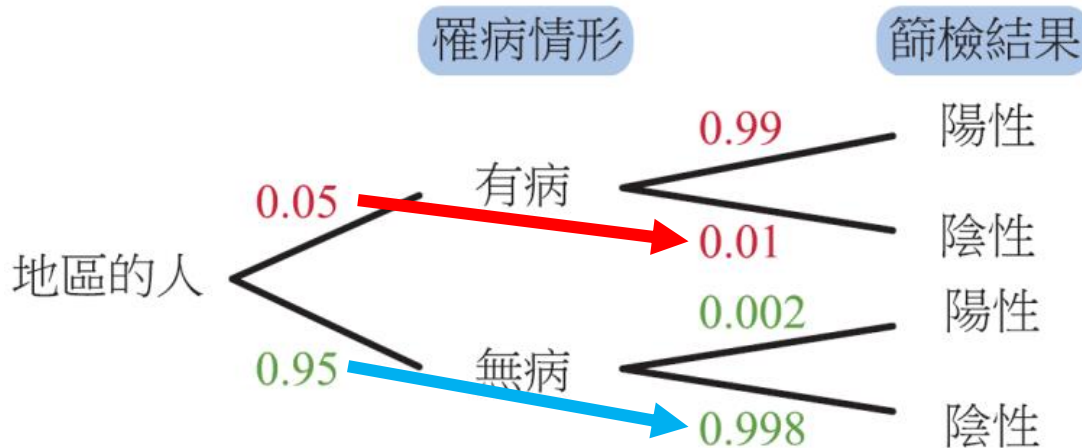
$$\frac{50\% \times 80\%}{30\% \times 100\% + 50\% \times 80\% + 20\% \times 40\%} = \frac{20}{39} > 0.5$$

12. 根據統計：某地區有5%的人罹患某種傳染病，且患者經篩檢後呈現陽性的機率為99%；未患此病的人經篩檢後呈現陽性的機率為0.2%。
- (1) 從此地區任選一人接受檢驗，求此人檢驗結果為陽性的機率。
  - (2) 「偽陽性」表示某人經篩檢後呈現陽性但實際上沒生病。已知某人篩檢呈現陽性，求此人為偽陽性的機率。

12. 根據統計：某地區有5%的人罹患某種傳染病，且患者經篩檢後呈現陽性的機率為99%；未患此病的人經篩檢後呈現陽性的機率為0.2%。
- (1) 從此地區任選一人接受檢驗，求此人檢驗結果為陽性的機率。
  - (2) 「偽陽性」表示某人經篩檢後呈現陽性但實際上沒生病。已知某人篩檢呈現陽性，求此人為偽陽性的機率。

承例題12，已知某人檢驗結果呈陰性反應，求此人確實沒有染病的機率。

解：



由樹狀圖得知，  
此檢驗結果為陰性反應的人確實沒有染病的機率為

$$\frac{0.95 \times 0.998}{0.05 \times 0.01 + 0.95 \times 0.998} = \frac{9481}{9486} \approx 0.9995$$

例題12中利用貝氏定理求得偽陽性的機率，可做為判別需不需進行普篩的其中一個參考數據

## 丁、機率的回顧—古典機率、客觀機率與主觀機率

機率一詞常常出現在日常生活中，在第二冊我們學過「古典機率」的定義：設一試驗樣本空間 $S$ 之樣本點為有限個，且每個樣本點出現機會均等，事件 $A$ 發生的機率

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A \text{ 的樣本點個數}}{S \text{ 的樣本點個數}}$$

例如丟一枚均勻硬幣一次，正面出現的機率為  $\frac{1}{2}$

除了古典機率外，還有其他定義機率的方式，以下介紹常見的兩種。

# 丁、機率的回顧—古典機率、客觀機率與主觀機率

## (一) 客觀機率

將調查或試驗獲得的事件發生頻率當作該事件的機率，稱為「客觀機率」。例如美國高爾夫球手老虎伍茲在2019年獲得第82場美巡賽的冠軍，在此之前他總共參加了359場，我們就把「獲勝的頻率」當作他「比賽的勝率」，即他比賽的勝率為

$$\frac{82}{360} \approx 23\%$$

由上述可知，客觀機率是統計多次試驗結果而來的，而且，此數據會隨著試驗次數或調查數據的不同而有所改變，因此，客觀機率並非是個不變的數值。

# 丁、機率的回顧—古典機率、客觀機率與主觀機率

## (一) 客觀機率

許多生活經驗中的機率常屬於客觀機率。本單元的例題 3、7、9、10、11、12 中的機率，是根據統計數據或依據過去經驗而得，這些皆屬客觀機率。

# 丁、機率的回顧—古典機率、客觀機率與主觀機率

## (二) 主觀機率

在缺乏調查或試驗資料的情況下，觀察者對於某些事件會依過去的經驗或心理的感覺來判斷事件發生的機率，這是一種主觀判斷的結果，稱為「主觀機率」。

例如：某生追求一位女孩，經過各種互動的跡象，認為可以追到該女孩的機率為0.8，這就是主觀機率。

又例如：某生對此次數學科考試準備充分，信心滿滿，評估此次考試及格的機率為0.9，這也是主觀機率。

# 丁、機率的回顧—古典機率、客觀機率與主觀機率

## (二) 主觀機率

無論是使用以上哪種定義，所得到的機率都必須滿足下列兩個條件：

- (1) 整個樣本空間發生的機率為1。
- (2) 任何事件 $A$ 發生的機率 $P(A)$  必須滿足 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

例如：

明天中、韓棒球賽，如果認為中華隊獲勝的機率為0.8，又認為韓國隊獲勝的機率為0.5，這樣的機率是不合理的。

# 丁、機率的回顧—古典機率、客觀機率與主觀機率

## (二) 主觀機率

法國著名的數學家拉普拉斯 ( P - S M. de Laplace , 1749 ~ 1827 ) 曾說：「機率必將成為人類知識中最重要的一部分，生活中，大部分重要的問題都將只是機率的問題。」近年來機率論迅速發展，不僅成為數學中一個重要的領域，獲得機率的各種方法，也常應用在各專業領域上，除了協助我們評估事件發生的可能性，也能做為許多決策的依據。

選出所有正確的選項。

- (1) 某人射擊50發，命中10發，可用  $\frac{1}{5}$  做為其命中率
- (2) 某人射擊50發，命中10發，表示接下來5發他一定會命中一發
- (3) 某人判斷今天有3成的機率會下雨，有8成的機率不下雨，這樣機率的判斷是不合理的
- (4) 某人對其投資信心滿滿，認為百分之兩百會賺錢，這樣機率的判斷是不合理的。

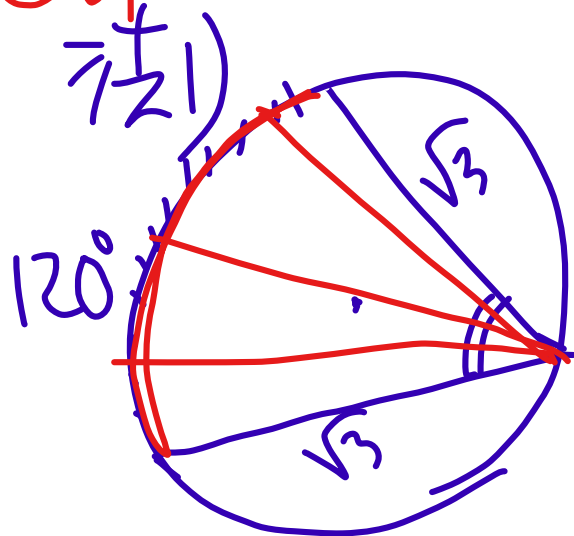
解：

- (1) 其命中率可以由這次涉及結果做計算，故合理
- (2) 前50發的命中率與接下來射擊的命中率，不一定會完全相等，因此不合理
- (3) 因為沒有調查與試驗資料，因此不合理
- (4) 樣本空間一定是100%，故機率超過100%不合理

# 單元 7 結束

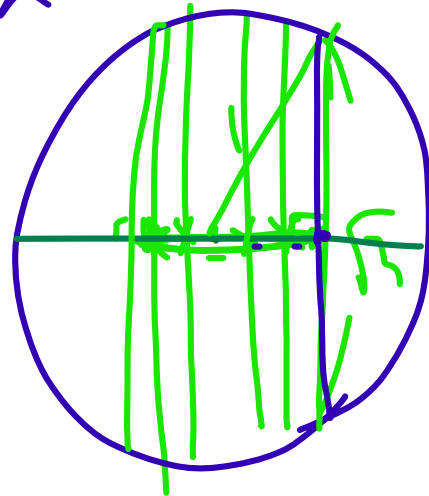
Ending 1: 在一單位圓上, 隨機取 三點 (兩點)  $A, B$

Sol. 求  $AB \geq \sqrt{3}$  的機率



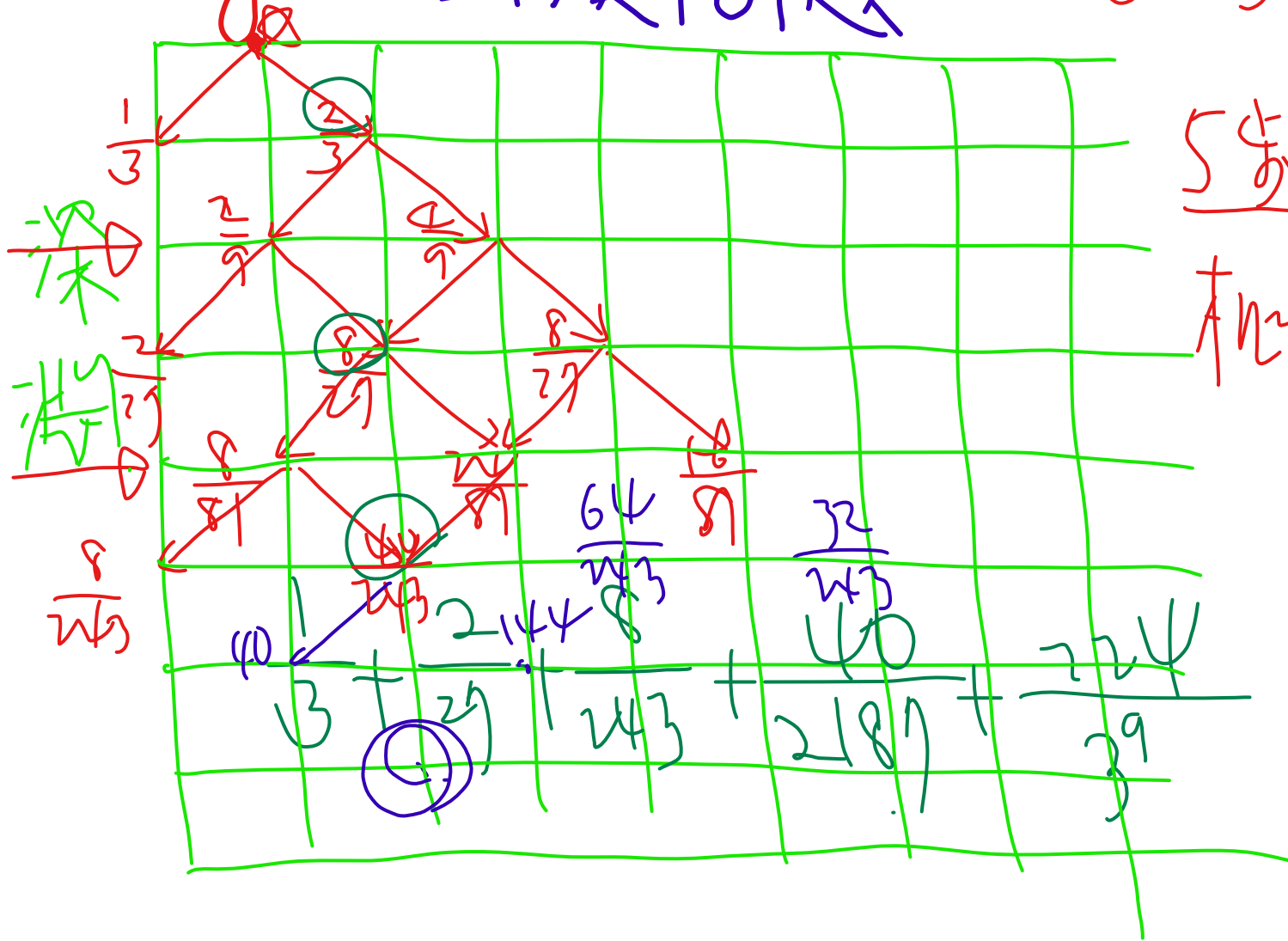
$$P = \frac{1}{3}$$

法 2



$$P = \frac{1}{2}$$

# Ending 2: 西漢問題. (左 $\frac{1}{3}$ , 右 $\frac{2}{3}$ )



5步內安全之

$$P(\text{安全}) = \frac{81 + 18 + 8}{243}$$

$$= \frac{136}{243}$$