單元 8 三元一次聯立方程式

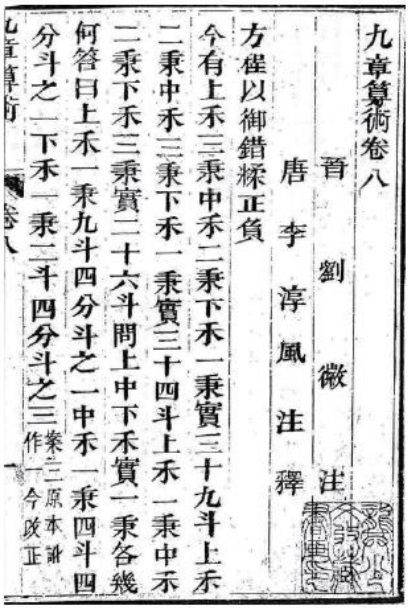
8 三元一次聯立方程式

糧行秤米

一等米5袋、二等米3袋、三等米2袋，總重19斤
一等米3袋、二等米3袋、三等米1袋，總重13斤
一等米2袋、二等米2袋、三等米1袋，總重10斤
問：一、二、三等米每袋各重幾斤？

上述改編自《九章算術》的問題
可用本單元要介紹的三元一次聯立方程式解出

甲、加減消去法



九章算術卷八

晉　劉徽　注

唐　李淳風　注釋

方程以御錯糅正負

今有上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九斗上禾二秉中禾三秉下禾一秉實三十四斗上禾一秉中禾二秉下禾三秉實二十六斗問上中下禾實一秉各幾何答曰上禾一秉九斗四分斗之一中禾一秉四斗四分斗之一下禾一秉二斗四分斗之三案三原本訛作二今改正

九章算術　卷八

《九章算術》成書約在西元50至100年間是討論一次聯立方程式的先驅，
作者已不可考

之前的課程，我們常使用加減消去法解二元一次聯立方程式，這裡將繼續使用同樣的方法來解「三元一次聯立方程式」

甲、加減消去法

在上述引言的問題中，我們可以假設一、二、三等米每袋分別為 x , y , z 斤，並依題意列得

$$5x + 3y + 2z = 19,\ 3x + 3y + z = 13,\ 2x + 2y + z = 10$$

因為這三個方程式必須同時成立，所以經常將它們並列寫成如下的形式

$$\begin{cases} 5x+3y+2z=19 \\ 3x+3y+z=13 \\ 2x+2y+z=10 \end{cases}$$

像這種由三個未知數所形成的一次聯立方程式，稱其為**三元一次聯立方程式**

甲、加減消去法

三元一次聯立方程式的解法與二元一次聯立方程式的解法類似

先消去其中一個未知數，得到一個二元一次聯立方程式

再用解二元一次聯立方程式的方法，就可以求得其解

例題

1. 解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x+3y+2z=19 \\ 3x+3y+z=13 \\ 2x+2y+z=10 \end{cases}$

隨堂

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+4z=10 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases}$

解：

將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x+y+z=3 & ① \\ 2x+3y+4z=10 & ② \\ 3x+2y-z=-1 & ③ \end{cases}$

首先，利用加減消去法先消去z：由①x4-②，得

$2x + y = 2$ ④

由①+③，得

$4x + 3y = 2$ ⑤

接著，再消去y：由④x3–⑤，得

$2x = 4$

隨堂

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+4z=10 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases}$

解：

解得$x = 2$

最後，將 $x = 2$ 代入④式，得$y = -2$

再將 $x = 2, y = -2$ 代回①式，得$z = 3$

故聯立方程式的解為 $x = 2, y = -2, z = 3$

例題

2. 解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 3x-2y+5z=6 \\ 2x-5y+7z=10 \end{cases}$

隨堂

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+7y+3z=4 \\ 3x-2y+2z=1 \end{cases}$

解：

將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x+y+z=3 & ① \\ 2x+7y+3z=4 & ② \\ 3x-2y+2z=1 & ③ \end{cases}$

首先，利用加減消去法先消去z：由①x3－②，得

$x-4y=5$ ④

由③－①x2，得 $x-4y=-5$ ⑤

接著，再消去y：由④－⑤，得 $0x=10$ (或$0=10$)

最後，因為沒有任意實數x滿足上式

所以原聯立方程式無解

例題

3. 解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 3x-2y+5z=6 \\ 2x-5y+7z=15 \end{cases}$

隨堂

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ x-4y+z=-7 \\ 3x+3y-2z=9 \end{cases}$

解：

將聯立方程式編號為 $\begin{cases} x+2y-z=5 & ① \\ x-4y+z=-7 & ② \\ 3x+3y-2z=9 & ③ \end{cases}$

首先，利用加減消去法先消去z：由①+②，得

$2x-2y=-2$ ④

由③−①x2，得

$x-y=-1$ ⑤

接著，再消去y：由⑤x2−④，得

$0x=0$(或$0=0$)

解三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ x-4y+z=-7 \\ 3x+3y-2z=9 \end{cases}$

解：

因為任意實數x都滿足上式，故令$x=t$代入⑤式，得

$y=x+1=t+1$

再將$x=t, y=t+1$代回①式，得

$z=x+2y-5=t+2(t+1)-5=3t-3$

因此，可得聯立方程式的解為

$\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=3t-3 \end{cases}$，$t$為實數

即聯立方程式有無窮多組解

例題

4. 已知二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形通過$(1, 1)$,$(2, 3)$ $(3, 7)$三點， 求 a , b, c 的值

像例題4這樣的題目， 牛頓曾提出一個很漂亮的作法
可設通過(1, 1), (2, 3), (3, 7)三點的二次函數為

$$f(x) = 1 + A(x-1) + B(x-1)(x-2)$$

接著再利用$f(2) = 3$與$f(3) = 7$解出A與B的值，即可求出此二次函數
這樣的作法，稱作**牛頓插值法**

隨堂

已知圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$通過$(1, 1), (1, -1), (-2, 1)$三點，求d, e, f的值

解：

將三點的坐標代入圓方程式，可得

$$\begin{cases} d+e+f=-2 & ① \\ d-e+f=-2 & ② \\ -2d+e+f=-5 & ③ \end{cases}$$

首先，先利用加減消去法先消去f：由①−②，得

$2e=0$ 解得$e=0$

由①−③，得 $3d=3$ 解得$d=1$

再將$d=1, e=0$代回①式，得 $f=-3$

故$d=1, e=0, f=-3$

例題

5. 百貨公司促銷冰淇淋，限量100球，賣完為止。每人限購一支(單球、雙球或三球)，價格如圖所示。已知100球全部售完，購買的民眾有50人，總收入為2310元。問：購買單球、雙球與三球冰淇淋的民眾各有多少人？

隨堂

小偉到水果攤買水果。已知他帶的錢恰可以買4個蘋果及3個芭樂；若他想買5個蘋果及2個芭樂，則還不夠8元；若想買2個蘋果及4個芭樂，則還剩下28元問： 他帶了多少錢？又蘋果、芭樂1顆各多少元？

解：

設蘋果、芭樂一顆分別為x, y元，且小偉帶了z元
由題意可列式得三元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 4x+3y=z \\ 5x+2y=z+8 \\ 2x+4y=z-28 \end{cases}$$

整理得
$$\begin{cases} 4x+3y-z=0 & ① \\ 5x+2y-z=8 & ② \\ 2x+4y-z=-28 & ③ \end{cases}$$

隨堂

小偉到水果攤買水果。已知他帶的錢恰可以買4個蘋果及3個芭樂；若他想買5個蘋果及2個芭樂，則還不夠8元；若想買2個蘋果及4個芭樂，則還剩下28元問： 他帶了多少錢？又蘋果、芭樂1顆各多少元？

解：

首先，利用加減消去法先消去z

由②–①，得

$x-y=8$ ④

由①–③，得

$2x-y=28$ ⑤

接著，再消去y：由⑤–④，得 $x=20$

最後，將$x=20$代入④式，得 $y=12$

再將$x=20, y=12$代回①式，得$z=116$

故蘋果一顆20元、芭樂一顆12元，小偉帶了116元

乙、高斯消去法

現在我們要引進一套比加減消去法更有系統的操作方法

（一）一次聯立方程式的矩陣表示法

將一次聯立方程式中每一個方程式的常數項寫在等號右邊，而含有未知數的項則依固定的順序寫在等號左邊，如右圖中的三元一次聯立方程式

聯立方程式

$$\begin{cases} 2x-y+z=-4 \\ x+y+2z=1 \\ 3x+5y+9z=8 \end{cases}$$

增廣矩陣

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \leftarrow \text{第一列} \\ \leftarrow \text{第二列} \\ \leftarrow \text{第三列} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第一行} & \text{第二行} & \text{第三行} & \text{第四行} \end{array} & \end{array}$$

將這個聯立方程式中未知數的係數與常數項依序抽離出來，並記作左圖的形式，稱此為聯立方程式的**增廣矩陣**

增廣矩陣中的鉛直線是用來區別「係數」與「常數項」，但也可省略

乙、高斯消去法

(一)一次聯立方程式的矩陣表示法

在矩陣中，
橫的稱為列(由上至下編號)
直的稱為行(由左至右編號)
如圖中的增廣矩陣有3列4行

增廣矩陣

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{第一列} \\ \leftarrow \text{第二列} \\ \leftarrow \text{第三列} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第一行} & \text{第二行} & \text{第三行} & \text{第四行} \end{array} \end{array}$$

一般而言，每一個聯立方程式都會對應一個增廣矩陣
反之，每一個增廣矩陣也會對應一個聯立方程式

隨堂

寫出下列空格中的聯立方程式與增廣矩陣

題號	聯立方程式	增廣矩陣
(1)	$\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ 5x+2y=6 \\ x+z=4 \end{cases}$	
(2)		$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right]$

解：

題號	聯立方程式	增廣矩陣
(1)	$\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ 5x+2y=6 \\ x+z=4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$
(2)	$\begin{cases} x-2y+5z=7 \\ 2x+y=4 \\ 3y-z=-6 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right]$

（二）高斯消去法

前面在解三元一次聯立方程式時，我們求解的過程不外乎以下三種操作

(1) 將某兩個方程式對調

(2) 將某個方程式乘上非零的常數

(3) 將某個方程式乘上非零的常數後，再加到另一方程式

實際上，在解三元一次聯立方程式時，我們可重複上述三種操作，先將聯立方程式簡化成形式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2y+c_2z=d_2 \\ c_3z=d_3 \end{cases}$$

（二）高斯消去法

上述這兩種解聯立方程式的表現方式(聯立方程式的解法與增廣矩陣的解法)，通稱為**高斯消去法**

在增廣矩陣解聯立方程式的操作過程中，我們使用了三種列與列之間的運算，這些運算分別對應於解聯立方程式的三種操作，並統稱為**矩陣的列運算**

將矩陣的列運算整理如下

矩陣的列運算

(1) 將矩陣中的某兩列互換位置
(2) 將矩陣中的某一列乘以一個不為0的數
(3) 將矩陣中的某一列乘以一個不為0的數後再加到另一列

（二）高斯消去法

利用矩陣的列運算，可以將高斯消去法解三元一次聯立方程式的步驟歸納如下

(1) 作列運算使第一列第一行的數為1，且使第二列及第三列的第一行數字全為0

(2) 作列運算使第二列第二行的數為1，且使第三列第二行的數字為0

(3) 作列運算使第三列第三行的數為1

(4) 列出下圖中最後一個增廣矩陣所對應的聯立方程式並依序求z, y, x的解

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right] \xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

例題

6. 利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-y=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$

隨堂

利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} 3x+8y+5z=3 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$

解：

利用增廣矩陣計算如下

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{一、二列互換}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longleftarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)$$

隨堂

利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} 3x+8y+5z=3 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$

解：

利用增廣矩陣計算如下

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \text{x1} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \leftarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

隨堂

利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} 3x+8y+5z=3 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$

解：

因為最後一個增廣矩陣所對應的聯立方程式為

$$\begin{cases} x+2y+z=1 & \text{①} \\ y+z=0 & \text{②} \\ z=1 & \text{③} \end{cases}$$

所以將 $z = 1$ 代入②式，得 $y = -1$

再將 $y = -1, z = 1$ 代入①式，得 $x = 2$

故聯立方程式的解為 $x = 2, y = -1, z = 1$

高斯消去法也可以處理聯立方程式無解的情形

例題

7. 利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+z=3 \\ 2x+5y+2z=5 \end{cases}$

隨堂

利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 7x-4y+5z=4 \end{cases}$

解：

利用增廣矩陣計算如下

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times(-3) \\ \times(-7) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 10 & -2 & -17 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \times(-2) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

隨堂

利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 7x-4y+5z=4 \end{cases}$

解：

最後一個增廣矩陣所對應的聯立方程式為

$$\begin{cases} x-2y+z=3 & \text{①} \\ 5y-z=-8 & \text{②} \\ 0z=-1 & \text{③} \end{cases}$$

因為沒有任何實數 z 能滿足③式
所以原聯立方程式無解

例題

8.利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y-6z=5 \\ 3x+4y-8z=6 \end{cases}$

隨堂

利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x-3y+z=4 \end{cases}$

解：

利用增廣矩陣計算如下

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-4) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \times(-1)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

隨堂

利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x-3y+z=4 \end{cases}$

解：

最後一個增廣矩陣所對應的聯立方程式為

$$\begin{cases} x-y+z=1 & \text{①} \\ y-3z=0 & \text{②} \\ 0z=0 & \text{③} \end{cases}$$

因為任何實數z都能滿足③式

所以令$z=t$代入②式，得 $y=3t$

再將 $y=3t, z=t$ 代回①式，得

$x=1+3t-t=1+2t$

隨堂

利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x-3y+z=4 \end{cases}$

解：

因此聯立方程式的解為

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=t \end{cases}，t\text{為實數}$$

即聯立方程式有無窮多組解

接下來，利用高斯消去法來討論聯立方程式何時無解？何時有無窮多組解？

例題

9. 試就實數 a 的值，討論下列聯立方程式的解

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+5y-2z=5 \\ x+4y-7z=a \end{cases}$$

例題

隨堂

已知聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x+2y+3z=4 \\ x+3y+5z=a \end{cases}$ 有無窮多組解，求實數 a 的值

解：

利用增廣矩陣計算如下

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & a \end{array}\right] \xrightarrow[\times(-1)]{\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & a-7 \end{array}\right] \xrightarrow{\times(-2)}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right]$$

隨堂

已知聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x+2y+3z=4 \\ x+3y+5z=a \end{cases}$ 有無窮多組解，求實數 a 的值

解：

最後一個增廣矩陣所對應的聯立方程式為

$$\begin{cases} x+y+z=7 & \text{①} \\ y+2z=-3 & \text{②} \\ 0z=a-1 & \text{③} \end{cases}$$

因為聯立方程式有窮多組解

所以 $a-1=0$，解得 $a=1$

利用解聯立方程式，可以將空間中的向量表成三個已知向量的線性組合，我們來看下面的例題

例題

10. 將向量 $\vec{d}=(1,2,3)$ 表成 $\vec{a}=(2,4,-2), \vec{b}=(-1,1,2)$ 與 $\vec{c}=(3,-3,6)$ 的線性組合

隨堂

已知向量$\vec{a}=(1,1,2),\vec{b}=(-1,2,1),\vec{c}=(1,1,-3)$ 與$\vec{d}=(0,4,1)$

求滿足$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ 的x,y,z值

解：

因為$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$

所以$(0, 4, 1) = x\,(1, 1, 2) + y\,(-1, 2, 1) + z\,(1, 1, -3)$

即

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y+z=4 \\ 2x+y-3z=1 \end{cases}$$

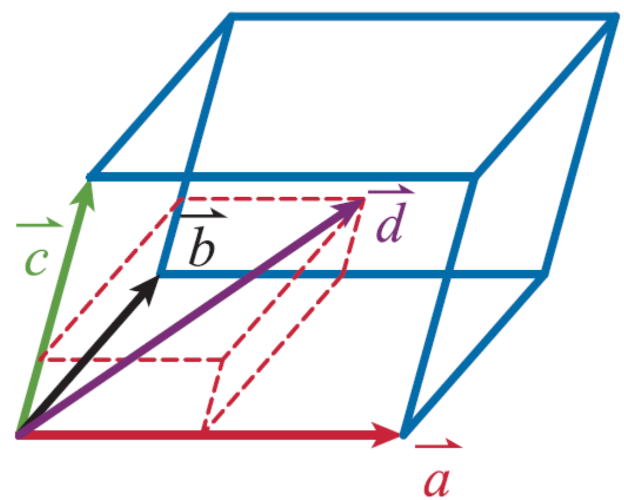
解得$x=\dfrac{11}{15},y=\dfrac{4}{3},z=\dfrac{3}{5}$

在例題10中， 向量$\vec{d}=(1,2,3)$可以唯一表成向量

$\vec{a}=(2,4,-2)$，$\vec{b}=(-1,1,2)$ 與 $\vec{c}=(3,-3,6)$ 的線性組合

事實上，除了向量(1, 2, 3)以外，其它的空間向量也都可以唯一表成向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的線性組合

這其實並非偶然，而是因為向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不在同一平面上如圖所示



一般而言，若三個向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$與$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$為「不共平面」的非零向量

也就是說，此三向量決定的平行六面體之體積不為0，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

則每一個空間向量$\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$都可以唯一表示成$\vec{a},\vec{b}$與$\vec{c}$的線性組合，即

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$$

其中x, y, z為實數且隨著$\vec{d}$而唯一決定

也就是說，聯立方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

恰有一組解

許多聯立方程式都可以使用數學軟體來求解，底下用免費軟體Maxima來示範解三元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 2x+2y+z=10 \\ 5x+3y+2z=19 \\ 3x+3y+z=13 \end{cases}$$

1. 輸入

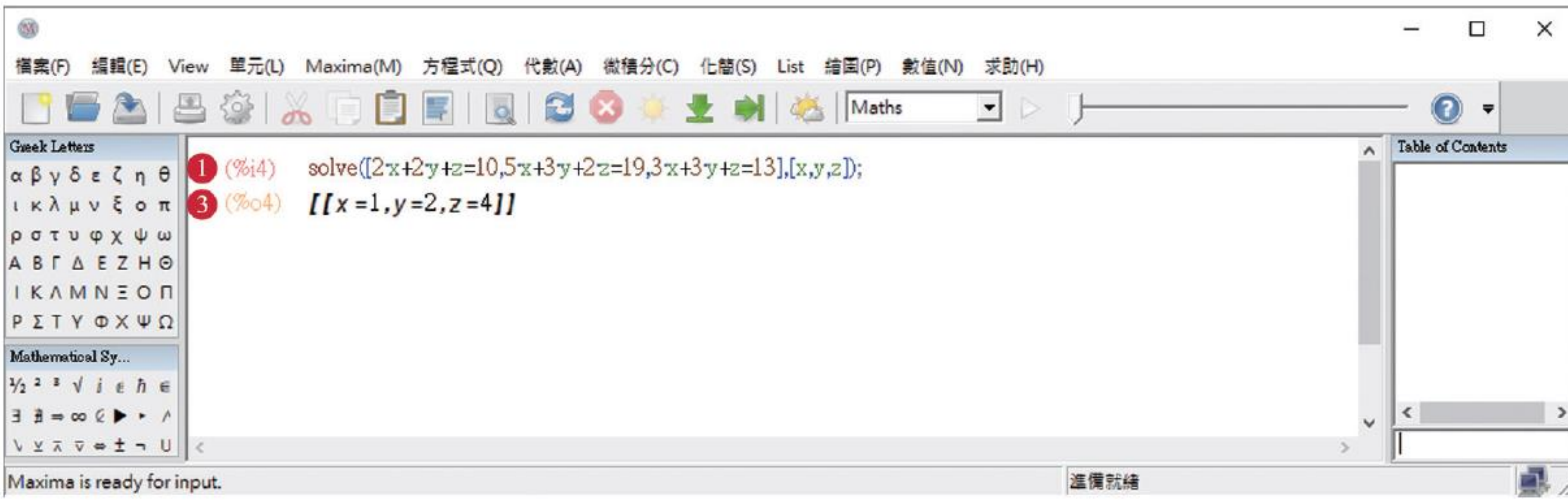
   solve([2*x+2*y+z=10,5*x+3*y+2*z=19,3*x+3*y+z=13],
   [x,y,z])

2. 同時按鍵盤上的Shift + Enter

許多聯立方程式都可以使用數學軟體來求解，底下用免費軟體Maxima來示範解三元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 2x+2y+z=10 \\ 5x+3y+2z=19 \\ 3x+3y+z=13 \end{cases}$$

3 此時，即可得到聯立方程式恰有一解$x=1, y=2, z=4$



運用電腦軟體可以解更多未知數的一次聯立方程式
例如解

$$\begin{cases} 2x+3y+4z-5t=-6 \\ 6x+7y-8z+9t=96 \\ 10x+11y+12z+13t=312 \\ 14x+15y+16z+17t=416 \end{cases}$$

1 輸入

solve([2*x+3*y+4*z-5*t=-6,6*x+7*y-8*z+9*t=96,10*x+11*y+12*z+13*t=312,14*x+15*y+16*z+17*t=416],[x,y,z,t])

2 同時按鍵盤上的Shift + Enter

運用電腦軟體可以解更多未知數的一次聯立方程式
例如解

$$\begin{cases} 2x+3y+4z-5t=-6 \\ 6x+7y-8z+9t=96 \\ 10x+11y+12z+13t=312 \\ 14x+15y+16z+17t=416 \end{cases}$$

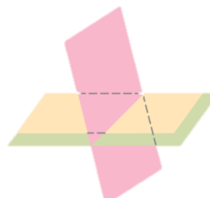
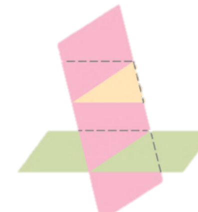
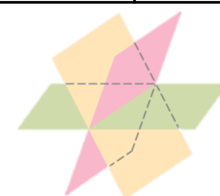
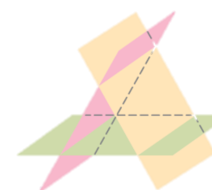
3 此時，即可得到聯立方程式恰有一解x=3, y=5, z=7, t=11

丙、三平面幾何關係的代數判定

在空間中，三元一次方程式 $ax+by+cz=d$ 的圖形是一個平面，且向量 (a,b,c) 為該平面的一個法向量
要判定空間中三個平面的相交情形，可以藉助它們的法向量與解三元一次聯立方程式來完成

首先，利用法向量，可以將三平面的相交情形與其對應的三元一次聯立方程式的解分類如下表

丙、三平面幾何關係的代數判定

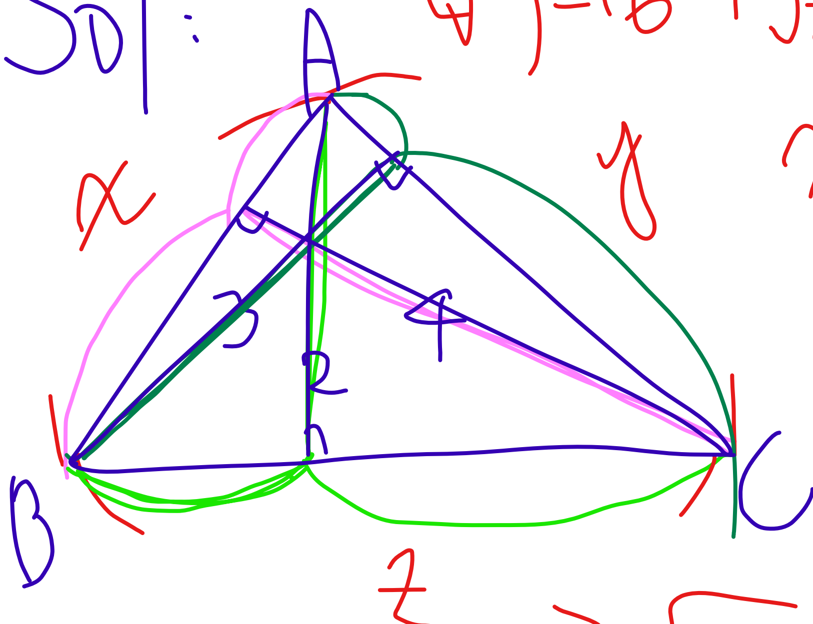
<table>
<tr><td rowspan="3">三個法向量
都互相平行</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">三平面重合</td><td colspan="2">二平面重合且與
第三平面平行</td><td colspan="2">三平面平行</td></tr>
<tr><td colspan="2">無窮多組解</td><td colspan="2">無解</td><td colspan="2">無解</td></tr>
<tr><td rowspan="3">其中二個法向
量平行
另一個不平行</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">二平面重合且
與第三平面交於一直線</td><td colspan="3">二平面平行且
與第三平面分別交於一直線</td></tr>
<tr><td colspan="3">無窮多組解</td><td colspan="3">無解</td></tr>
<tr><td rowspan="3">三個法向量
均不平行</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">三平面恰
交於一點</td><td colspan="2">三平面兩兩不重合
且相交於一直線</td><td colspan="2">三平面兩兩交於一直
線但沒有共同交點</td></tr>
<tr><td colspan="2">恰有一組解</td><td colspan="2">無窮多組解</td><td colspan="2">無解</td></tr>
</table>

單元 8 結 束

Ending $\begin{cases}\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-4}=z \\ \sqrt{x^2-9}+\sqrt{z^2-9}=y \\ \sqrt{y^2-16}+\sqrt{z^2-16}=x\end{cases}$ 求 $x+y+z$

$$=\frac{13\times 24}{\sqrt{455}}$$

Sol:



$$x:y:z=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=3:4:6$$

令 $x=3k,\ y=4k,\ z=6k$

$$\sqrt{\frac{13k}{2}\cdot\frac{7k}{2}\cdot\frac{5k}{2}\cdot\frac{k}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 3k\cdot 4$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{455}\,k^2}{4}=6k,\ \therefore k=\frac{24}{\sqrt{455}}$$