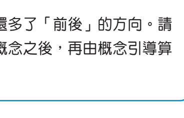
1 空間向量

1-1 空間概念

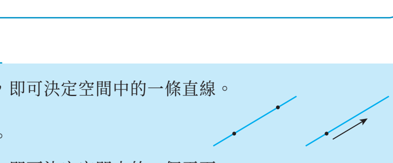
「空間」是我們生活的所在，除了有「上下」與「左右」，還多了「前後」的方向。請同學培養空間圖形的直覺，訓練立體透視的想像力，具備圖像的概念之後，再由概念引導算式，如此才能獲得正確答案。

1 空間中點、線、面的關係

1. 決定一條直線：給下列條件，即可決定空間中的一條直線。
(1)空間中兩相異點。
(2)空間中一點與射出的方向。

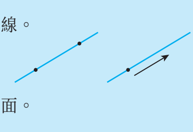


2. 決定一個平面：給下列條件，即可決定空間中的一個平面。
(1)不共線三點。
(2)一直線與線外一點。
(3)相交於一點的兩直線。
(4)平行兩直線。

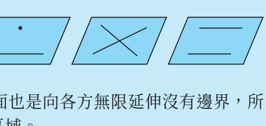


注意 空間中的直線實際向兩端無限延伸，平面也是向各方無限延伸沒有邊界，所以上述圖形都只畫出直線與平面的局部區域。

3. 平面與平面的關係：空間中兩相異平面的關係必為：
(1)平行。
(2)交於一線。此時可討論兩面的交角，特別的情形為兩面垂直。

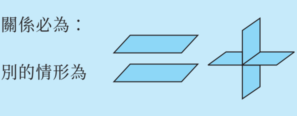


4. 直線與直線的關係：空間中兩相異直線的關係必為：
(1)平行。
(2)交於一點。此時可討論兩直線的交角，特別的情形為兩線垂直。
(3)歪斜（即不平行也不相交）。



注意 兩相異直線無論是平行、相交或歪斜，都有公垂線，且相交、歪斜的公垂線恰只有一條。

5. 直線與平面的關係：空間中一直線與一平面的關係必為：
(1)平行（即線與面不相交）。
(2)交於一點。
(3)直線落在平面上（即交點有無限多個）。

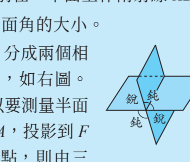


6. 線與面垂直：直線 L 與平面 E 交於 H 點，L_1 與 L_2 為 E 上交於 H 的兩相異直線，若 $L\perp L_1$ 且 $L\perp L_2$，則稱「直線 L 與平面 E 垂直」，此時 E 上過 H 的每條直線都會垂直 L。

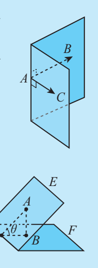
7. 空間中兩點 A、B 可連成線段 $\overline{AB}$，三點 A、B、C 若不共線，則可連成 ΔABC，若 ΔABC 為直角三角形，則可使用畢氏定理。

2 三垂線定理與二面角

1. 三垂線定理：如右圖(一)，面外一點 A 投影到平面 E 為 B 點，L 在平面 E 上，B 再投影到 L 為 C 點，則顯然 $\overline{AC}$ 與 L 垂直。（出現順序為①②③④）
例 斜切三明治如右圖(二)，所成圖形由四個直角三角形組成。



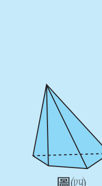
圖(一)


圖(二)

2. 三垂線定理的變形：仍如圖(一)，出現順序更改如下：
(1)面外一點 A 投影到平面 E 為 B 點，L 在平面 E 上，若 A 投影到 L 為 C 點，則顯然 $\overline{BC}$ 與 L 垂直。（出現順序為①②④③）
(2)平面 E 上有點 B 與直線 L，A 為 E 外一點，B 投影到 L 為 C 點，若 $\overline{AC}$ 與 L 垂直，且 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 垂直，則顯然 $\overleftrightarrow{AB}$ 與平面 E 垂直。（出現順序為②③④①）

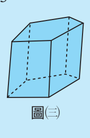
3. 二面角：將一平面沿著面上一直線來彎折，所成的圖形為一個二面角。如右圖，在折邊上任取一點 A，分別在二半面上作兩射線 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$，均與折邊垂直，則 $\angle BAC$ 為此二面角的大小。

注意 完整兩平面所成的二面角有四個，分成兩個相等的銳交角與兩個相等的鈍交角，如右圖。因為平面無限延伸沒有邊界，所以要測量半面 E 與 F 的二面角，可取 E 上一點 A，投影到 F 為 B 點，B 點再投影到折邊為 C 點，則由三垂線定理知 $\angle ACB$ 即為 E 與 F 的二面角 θ。



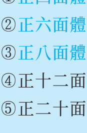
4. 投影圖形的面積：兩平面 E 與 F 夾二面角 θ，則 E 上的圖形投影到 F 上，所成圖形的面積為原面積 $\times|\cos\theta|$。

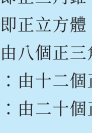
5. 立體圖形
(1)球體：一個半徑為 r 的球，表面積為 $4\pi r^2$，體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$。
(2)柱狀體（圓柱、角柱或斜柱）：設底面積為 a，高為 h，則體積為 ah，如圖(三)。
(3)錐體（圓錐、角錐或斜錐）：設底面積為 a，高為 h，則體積為 $\frac{1}{3}ah$，如圖(四)。

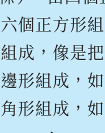

圖(三)

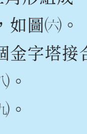
圖(四)

(4)正多面體：空間中的正多面體只有五種，考題集中在前三種。
①正四面體：即正三角錐（肉粽），由四個正三角形組成，如圖(五)。
②正六面體：即正立方體，由六個正方形組成，如圖(六)。
③正八面體：由八個正三角形組成，像是把兩個金字塔接合而成，如圖(七)。
④正十二面體：由十二個正五邊形組成，如圖(八)。
⑤正二十面體：由二十個正三角形組成，如圖(九)。


圖(五)


圖(六)


圖(七)


圖(八)

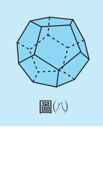
圖(九)

1-2 空間坐標與向量

已經熟悉平面坐標系的同學，對空間坐標的觀念想必不陌生。生活在三度空間的我們，只要把 xy 平面再加上一條數線，即 z 軸，就成為空間坐標系，繼而平面向量的觀念和運算，都可以推廣到空間，成為分析空間圖形強而有力的工具。

1 空間坐標系與兩點的距離、中點與分點

1. 空間坐標系：空間中三條數線 x 軸、y 軸、z 軸，兩兩垂直交於一點 O，滿足右手規則，則空間中任一點 P 投影到三條數線上，可得 x 值、y 值與 z 值依次為 a、b、c，則用序組 (a,b,c) 表示 P 點的坐標，如此可使空間中的每一個點與坐標序組建立一一對應的關係。

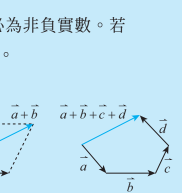


2. 坐標面：由坐標軸張成的平面，共有三個，兩兩垂直，如下：
(1) xy 面：x 軸與 y 軸張成的平面。
(2) yz 面：y 軸與 z 軸張成的平面。
(3) xz 面：x 軸與 z 軸張成的平面。

3. 卦限：三個坐標面把空間分割成八個「卦限」，為了方便，我們稱 x 值、y 值、z 值均正的部分為第一卦限，常把空間圖形放在第一卦限內來進行分析。

4. 距離公式：空間中兩點 $A(x_1,y_1,z_1)$ 與 $B(x_2,y_2,z_2)$，則 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。

5. 中點與分點坐標：空間中兩點 $A(x_1,y_1,z_1)$ 與 $B(x_2,y_2,z_2)$，則 $\overline{AB}$ 中點為 $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$。
點 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，如右圖，則 P 坐標為 $(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n},\frac{mz_2+nz_1}{m+n})$。



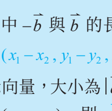
2 空間向量的加減法與係數積

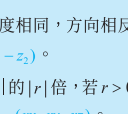
1. 空間向量：空間中有大小及方向的量，如以 A 為起點、B 為終點的有向線段，記為 $\overrightarrow{AB}$，讀作向量 AB。

2. 空間向量的坐標表法：空間坐標中 A 點沿 x 軸方向移 p，再沿 y 軸方向移 q，再沿 z 軸方向移 r，到達 B 點，則 $\overrightarrow{AB}$ 可用序組 (p,q,r) 表示。若坐標為 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$。

3. 向量的絕對值：即向量的大小，如 $\vec{a}$ 的大小記為 $|\vec{a}|$，必為非負實數。若 $\overrightarrow{AB}=(p,q,r)$，則 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$，即為 $\overline{AB}$ 的長度。

4. 空間向量的加法
(1)共起點的兩向量，以平行四邊形法相加。
(2)多個向量相加，可用頭尾相連的方法求和，如 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$。
(3)若 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，則 $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$。





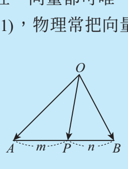
5. 空間向量的減法：規定 $\vec{a}-\vec{b}$ 即為 $\vec{a}+(-\vec{b})$，其中 $-\vec{b}$ 與 $\vec{b}$ 的長度相同，方向相反。若 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，則 $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$。

6. 空間向量的係數積：給實數 r 與 $\vec{a}$，規定 $r\vec{a}$ 表示向量，大小為 $|\vec{a}|$ 的 $|r|$ 倍，若 $r>0$，則與 $\vec{a}$ 同向；若 $r<0$，則與 $\vec{a}$ 反向。若 $\vec{a}=(x,y,z)$，則 $r\vec{a}=(rx,ry,rz)$。

7. 向量的平行：非零向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行 $\Leftrightarrow$ 可找到實數 r 使 $\vec{a}=r\vec{b}$，常用此性質解決空間中三點共線的問題。

8. 線性組合與標準單位向量：非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 不共平面，則任一向量都可唯一地表示成 $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$。令 $\vec{i}=(1,0,0)$，$\vec{j}=(0,1,0)$，$\vec{k}=(0,0,1)$，物理常把向量 (x,y,z) 寫成 $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，如 $(3,-2,5)=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$。

9. 分點公式：空間中 P 在 $\overline{AB}$ 上，若 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，且 O 為任意一點，則 $\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。與平面上的分點公式相同。



10. 共線定理：空間中有 O、A、B、P 四點，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，則 $x+y=1 \Leftrightarrow P$、A、B 三點在同一直線上。與平面上的共線定理相同。

1-3 空間向量的內積

如同平面向量，空間向量也可以定義內積，其算法、性質和應用都與平面向量類似，所以這個單元學起來應該蠻輕鬆的。用內積可以幫助我們在空間中求長度及夾角，是非常重要的手法，在後續點、線、面的計算很常用到，一定要會！

1 內積的計算及其性質

1. 內積定義：空間向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，規定兩向量的內積為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\theta$，其中 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。

2. 內積的投影算法：空間中 C 點投影到 $\overleftrightarrow{AB}$ 為 H，若 θ 為銳角則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AB}$，若 θ 為鈍角需加負號為 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overline{AH}\times\overline{AB}$。如右圖。

3. 內積的坐標算法：若 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，則由餘弦定理可證明 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$。

4. 內積的性質：和平面向量相同，如下：
(1)交換律：給空間向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$。
(2)結合律：k 與 t 為實數，則 $(k\vec{a})\cdot(t\vec{b})=(kt)\vec{a}\cdot\vec{b}$。
(3)分配律：給空間向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，則 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$。

注意 若 $\vec{a}=\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{k}=\vec{b}\cdot\vec{k}$，即內積有等量公理。但反之不成立，也就是內積沒有消去律，即「$\vec{a}\cdot\vec{k}=\vec{b}\cdot\vec{k} \not\Rightarrow \vec{a}=\vec{b}$」。

2 內積的應用

1. 用內積求長度：空間向量 $\vec{a}$，則 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$。同理，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}$。

2. 用內積求夾角：兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\times|\vec{b}|}$，此式由內積定義移項而得。

3. 三角形面積：空間向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 共起點所張的三角形面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$。

4. 正射影：空間向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為向量 $(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$。

5. 柯西不等式：給空間向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，則 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$。
即任意實數 x_1、y_1、z_1、x_2、y_2、z_2，不等式 $(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\le(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)$ 必成立
且式中等號成立 $\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$
即向量 (x_1,y_1,z_1) 與 (x_2,y_2,z_2) 平行。

1-4 外積與三階行列式

外積是空間向量特有的運算，可幫助我們解決立體圖形的難題，成為未來處理空間中點、線、面的有力工具。在本單元中我們還要把行列式推廣到三階，會比二階行列式複雜，更具有挑戰性。

1 外積的定義、性質及其應用

1. 二階行列式（複習）
(1)規定 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，如 $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-22$。
(2)平面上向量 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，所張成的平行四邊形面積為
$▱=\sqrt{|\vec{a}|^2\times|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}|$。

2. 外積的定義：$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，規定
$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$，稱為 $\vec{a}$ 外積 $\vec{b}$。

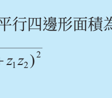
注意 空間向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 是一個數值，但外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ 是一個向量，有各自專用的符號，所以「·」與「×」兩者差異很大，請勿混淆。

3. 外積的大小：可推得空間向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 張成的平行四邊形面積恰為 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的大小，即 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\sin\theta$，其中 θ 為 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夾角。推導如下：

證 設 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 θ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 張成的平行四邊形面積為

$$▱=\sqrt{|\vec{a}|^2\times|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}$$
$$=\sqrt{(\cancel{x_1^2x_2^2}+x_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2x_2^2+\cancel{y_1^2y_2^2}+y_1^2z_2^2+z_1^2x_2^2+z_1^2y_2^2+\cancel{z_1^2z_2^2}) -(\cancel{x_1^2x_2^2}+\cancel{y_1^2y_2^2}+\cancel{z_1^2z_2^2}+2x_1x_2y_1y_2+2y_1y_2z_1z_2+2x_1x_2z_1z_2)}$$
$$=\sqrt{(y_1^2z_2^2+y_2^2z_1^2-2y_1y_2z_1z_2)+(x_1^2z_2^2+x_2^2z_1^2-2x_1x_2z_1z_2)+(x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2)}$$
$$=\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$
$=|\vec{a}\times\vec{b}|$，得證

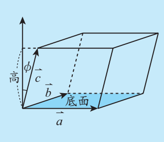
4. 外積的方向：經計算得知 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ 且 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ 必成立，所以 $\vec{a}\times\vec{b}$ 與 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 垂直，進一步可知右手四指由 $\vec{a}$ 轉到 $\vec{b}$，大拇指所指的方向即 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向。



注意 外積會與原先的兩個向量都垂直，這個特性在解空間問題時大有幫助，只要確定「想找 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的公垂向量」，直接求 $\vec{a}\times\vec{b}$ 就對了。

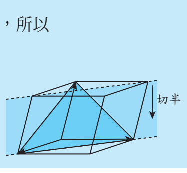
5. 外積的性質：由定義可推得
(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$。注意 內積有交換律，外積則無。
(2)分配律：$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$。
(3)係數的結合律：p、q 為實數，則 $(p\vec{a})\times(q\vec{b})=(pq)\vec{a}\times\vec{b}$。
(4)若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，則 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$。注意 不可把 $\vec{0}$ 寫成 0。

6. 三向量張成的平行六面體體積：空間中向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共起點可張成平行六面體，若以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 張成的平行四邊形為底面，則高為 $|\vec{c}|\cdot|\cos\phi|$，其中 ϕ 為 $\vec{c}$ 與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的夾角，所以平行六面體的體積為 $V_{六}=\underbrace{|\vec{a}\times\vec{b}|}_{底面積}\times\underbrace{|\vec{c}|\times|\cos\phi|}_{高}=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$。



注意 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 張成的平行六面體其中任一面都可當底面，所以 $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ 三者相等。

7. 三向量張成的四面體體積：將平行六面體先切半再削成錐體，即為 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 張成的四面體，所以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共起點張成的四面體體積為 $V_{四}=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$。



2 三階行列式的定義及性質

1. 三階行列式：定義方式有直接展開與降階兩種，這裡以「直接展開」較為方便，但要定義更高階的行列式時就必須用「降階」的方法。
(1)直接展開：規定 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+dhc+gfb-ceg-bdi-ahf$。展開共有 $3!=6$ 項。或加兩行 $\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$

(2)降階：左上角取正，向右、向下為一正一負，依 $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ 的正負規則將行列式對某一行（列）展開而降為二階行列式。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\underbrace{-d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}+e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}-f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}}_{對第二列展開}=\underbrace{c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}-f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}+i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{對第三行展開}。$$

注意 要用行列式降階求值前，儘量用行列式性質得到 0 項，再予以展開。

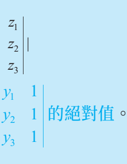
2. 三階行列式的性質：和二階行列式的性質完全相同，更高階的行列式也都會成立，如下：
(1)將一行（或列）乘一常數加到另一行（或列），行列式值不變。
如 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b+2a & c \\ x & y+2x & z \\ p & q+2p & r \end{vmatrix}$。
×2
(2)任一行（或列）的各項帶 k，則可將 k 提出。如 $\begin{vmatrix} a & kb & c \\ x & ky & z \\ p & kq & r \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$。
(3)兩行（或列）對調，行列式的值會變號。如 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$。
(4)若一行（或列）的各項均為兩項之和，則可拆開成兩個行列式相加。
如 $\begin{vmatrix} a+i & b+j & c+k \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$。
(5)行與列互換，行列式的值不變。如 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix}$。

3. *Vander Monde* 行列式：$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$。

注意 化簡行列式時，儘量運用性質提公因式並得到 0 項，再予以展開，其方法不只一種，技巧性較高，請同學多觀摩比較，學習較佳的作法。

3 三階行列式的應用

1. 空間中 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AD}=(x_3,y_3,z_3)$，則 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行六面體體積 $=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值，除以 6 即為四面體 $ABCD$ 的體積。



證 平行六面體體積 $V_{六}=|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)\cdot(x_3,y_3,z_3)$ 的絕對值
$=x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 的絕對值
$=(x_3y_1z_2-x_3z_1y_2+y_3z_1x_2-y_3x_1z_2+z_3x_1y_2-z_3y_1x_2)$ 的絕對值 $=|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}|$

2. 平面上點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$ 連成三角形面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的絕對值。

證 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$
ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|$
$=\frac{1}{2}|x_2y_3-x_2y_1-x_1y_3+\cancel{x_1y_1}-y_2x_3+y_2x_1+y_1x_3-\cancel{y_1x_1}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}|$

3. 平面上三相異直線 $L_1: a_1x+b_1y=c_1$、$L_2: a_2x+b_2y=c_2$、$L_3: a_3x+b_3y=c_3$ 若交於一點，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。反之，不成立，若行列式為 0，則可能三線平行。

證 設交點為 (p,q)，代入 L_1、L_2、L_3 都成立
$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1p+b_1q \\ a_2 & b_2 & a_2p+b_2q \\ a_3 & b_3 & a_3p+b_3q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}=0$
$\times(-q)$ $\times(-p)$