

單元 4 三階行列式

4 三階行列式

在設計上，平行六面體是常被使用的素材
例如，圖是紐西蘭的一位建築師用一平行六面體造型的網狀建築物來遮蔽消防設施

在第三冊中，我們介紹過二階行列式，並用它來表示平行四邊形的面積

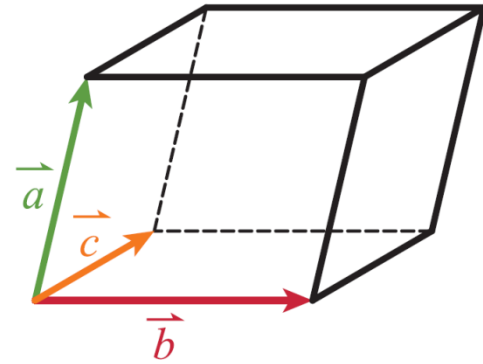
本單元將進一步介紹三階行列式的展開式與性質，並用它來表示平行六面體的體積



甲、平行六面體的體積

設 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 為空間中三個向量

將這三個向量平移，使它們有共同的始點
當這三個向量的三個終點與共同的始點在
同一個平面上時，稱此三個向量**共平面**



反之，當這三個終點與共同的始點不在同一個平面上時
稱此三個向量**不共平面**，此時這三個向量可以決定一個
平行六面體(有六個面，每面都是平行四邊形)，如圖所示

平行六面體的體積等於任何一個面的
面積(稱為底面積)乘以此面與對面的距離(稱為高)，即

平行六面體的體積等於底面積與高的乘積

甲、平行六面體的體積

底下我們利用向量的外積與內積，求平行六面體的體積
設三個不共平面的向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所決定的平行六面體之體積為 V ，由 \vec{b} 與 \vec{c} 所決定的底面積為 S ，對應的高為 h

(1) 底面積 S ：

由向量外積的幾何性質，得知

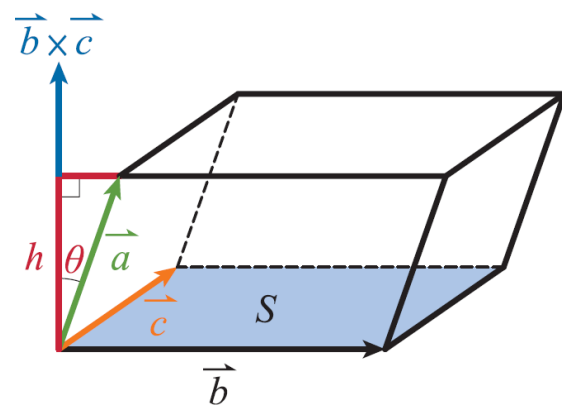
$$S = |\vec{b} \times \vec{c}|$$

(2) 高 h ：

設 \vec{a} 與 $\vec{b} \times \vec{c}$ 的夾角為 θ ，如圖所示

因為 $\vec{b} \times \vec{c}$ 與 \vec{b}, \vec{c} 都垂直，所以平行六面體的高為

$$h = \left| |\vec{a}| \cos \theta \right|$$



甲、平行六面體的體積

底下我們利用向量的外積與內積，求平行六面體的體積
設三個不共平面的向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所決定的平行六面體之體積
為 V ，由 \vec{b} 與 \vec{c} 所決定的底面積為 S ，對應的高為 h

(3) 體積 V ：

$$\begin{aligned} V &= Sh = |\vec{b} \times \vec{c}| |\vec{a}| \cos \theta \\ &= |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \theta = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| \end{aligned}$$

也就是說，體積 V 等於向量 \vec{a} 與 $\vec{b} \times \vec{c}$ 的內積之絕對值

三個向量決定的平行六面體之體積

在空間中，由不共平面的三個向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所決定的平行六面體之體積為

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

同理，上述的體積公式也可為 $|\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})|$ 或 $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$

例題

1. 求向量 $\vec{a} = (2, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{c} = (1, 3, 1)$ 所決定的平行六面體之體積

解：

已知向量 $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, k, 1)$ 所決定的平行六面體之體積為 6，求實數 k 的值

解：

$$\begin{aligned} \text{因為 } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (1, 2, -1) \cdot \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & k \end{vmatrix} \right) \\ &= (1, 2, -1) \cdot (2 - k, -3, 2k + 2) \\ &= 1 \times (2 - k) + 2 \times (-3) + (-1) \times (2k + 2) \\ &= -3k - 6 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } |-3k - 6| = 6 \quad \text{即 } 3k + 6 = \pm 6$$

$$\text{解得 } k = 0 \text{ 或 } -4$$

乙、三階行列式

我們推廣二階行列式，將符號 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 稱三階行列式

其所代表的值為

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

三階行列式的展開式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

例題

2. 求下列三階行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \circ (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \circ$$

解：

求下列三階行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \circ (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} \circ$$

解：

$$\begin{aligned} (1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \times 3 \times 5 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 0 \times 1 \\ &\quad - 1 \times 0 \times 1 - 2 \times 1 \times 5 - 2 \times 3 \times 2 \\ &= 15 + 4 + 0 - 0 - 10 - 12 \\ &= -3 \end{aligned}$$

求下列三階行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \circ (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} \circ$$

解：

$$\begin{aligned} (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} &= 1 \times 4 \times 7 + 2 \times 5 \times 6 + 0 \times 0 \times 3 \\ &\quad - 0 \times 4 \times 6 - 2 \times 3 \times 7 - 1 \times 0 \times 5 \\ &= 28 + 60 + 0 - 0 - 42 - 0 \\ &= 46 \end{aligned}$$

三階行列式具有下列性質

(性質1~6也是二階行列式所具有的性質)

1. 行列互換其值不變，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

三階行列式具有下列性質

(性質1~6也是二階行列式所具有的性質)

2. 任意兩行(列)對調，其值變號。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第一、二兩行對調})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第一、三兩列對調})$$

三階行列式具有下列性質

(性質1~6也是二階行列式所具有的性質)

3. 任一行(列)可以提出同一個數。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 \\ b_1 & kb_2 & b_3 \\ c_1 & kc_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

三階行列式具有下列性質

(性質1~6也是二階行列式所具有的性質)

4. 兩行(列)成比例，其值為0。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_3 & a_3 \\ b_1 & kb_3 & b_3 \\ c_1 & kc_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第二、三兩行成比例})$$

$$\begin{vmatrix} ka_3 & kb_3 & kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第一、三兩列成比例})$$

三階行列式具有下列性質

(性質1~6也是二階行列式所具有的性質)

5. 將一行(列)的 k 倍加到另一行(列)，其值不變。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 + ka_3 & a_3 \\ b_1 & b_2 + kb_3 & b_3 \\ c_1 & c_2 + kc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(第三行的 k 倍加到第二行)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + ka_1 & b_2 + ka_2 & b_3 + ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(第一列的 k 倍加到第二列)

三階行列式具有下列性質

(性質1~6也是二階行列式所具有的性質)

6. 可依某一行(列)將一個行列式拆成兩個行列式的和
例如

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + e_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + f_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + d_1 & b_2 + d_2 & b_3 + d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

例題

3. 求下列三階行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 22 & 3 & 4 \\ 33 & 4 & 5 \\ 55 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} -29 & 4 & 9 \\ 37 & 97 & 83 \\ -53 & 3 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 29 & 4 & 9 \\ -38 & 97 & 83 \\ 53 & 3 & 7 \end{vmatrix} .$$

解：

求下列三階行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 45 & 35 & 5 \\ 5 & 28 & 0 \\ 16 & 0 & 4 \end{vmatrix} \circ (2) \begin{vmatrix} 123 & 456 & 789 \\ 101 & 102 & 103 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 123 & 456 & 789 \\ 101 & 102 & 103 \\ -5 & 7 & -9 \end{vmatrix} \circ$$

解：

$$\begin{aligned} (1) \begin{vmatrix} 45 & 35 & 5 \\ 5 & 28 & 0 \\ 16 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 5 \times 4 \times \begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 5 & 28 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \times 4 \times 7 \times \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 140 \times (9 \times 4 \times 1 + 1 \times 0 \times 4 + 1 \times 0 \times 5 \\ &\quad - 1 \times 4 \times 4 - 1 \times 5 \times 1 - 9 \times 0 \times 0) = 2100 \end{aligned}$$

求下列三階行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 45 & 35 & 5 \\ 5 & 28 & 0 \\ 16 & 0 & 4 \end{vmatrix} \circ (2) \begin{vmatrix} 123 & 456 & 789 \\ 101 & 102 & 103 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 123 & 456 & 789 \\ 101 & 102 & 103 \\ -5 & 7 & -9 \end{vmatrix} \circ$$

解：

(2) 利用性質6，得

$$\begin{vmatrix} 123 & 456 & 789 \\ 101 & 102 & 103 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 123 & 456 & 789 \\ 101 & 102 & 103 \\ -5 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 123 & 456 & 789 \\ 101 & 102 & 103 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. (降階)三階行列式可依某一行(列)降階展開成二階行列式，由三階行列式的展開式，可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$
$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)$$
$$= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

上式是依第一行降階展開成二階行列式
利用相同的方法，也可以依其他行或列降階展開
其結果整理如下

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{依第一行降階展開})$$

$$= -a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{依第二行降階展開})$$

$$= a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (\text{依第三行降階展開})$$

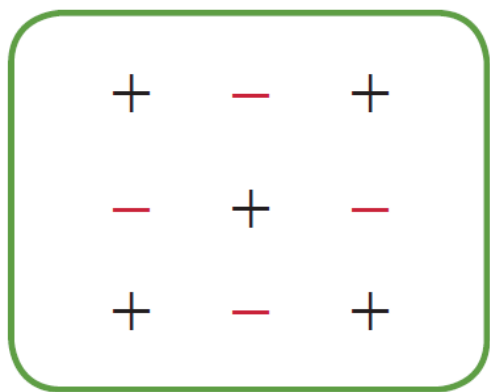
$$= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (\text{依第一列降階展開})$$

$$= -b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (\text{依第二列降階展開})$$

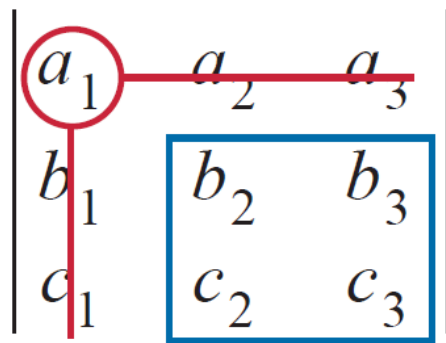
$$= c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (\text{依第三列降階展開})$$

以上各種降階公式都是依某一行(列)的三個數作展開，這三個數在展開後的「+」、「-」號，符合圖(1)的規律而與它們相乘的二階行列式之取法，就是把該數所在的行與列劃去，再將剩下的4個數按原來的位置關係組成的二階行列式。

例如，圖(2)為 a_1 所要乘的二階行列式之取法



(1)



(2)

當某一行(列)的二個數為0時，常使用降階展開求行列式的值

例題

4. 求下列三階行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 123 & 361 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \circ (2) \begin{vmatrix} 3 & 43 & 31 \\ -1 & -11 & 23 \\ -5 & -53 & 116 \end{vmatrix} \circ$$

解：

(1) 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$ ，求實數 k 的值

解：

(1) 依第二列降階展開，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow k = -4$$

(2) 求三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 47 & 48 & 92 \\ 333 & 334 & 668 \end{vmatrix}$ 的值

解：

(2) 將第一行分別乘以(-1)及(-2)加入第二行及第三行得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 47 & 48 & 92 \\ 333 & 334 & 668 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 47 & 1 & -2 \\ 333 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

(依第一列降階展開)

當某一行(列)的三個數皆相同時，可以使用性質5將該行(列)的二個數化為0，再降階展開，舉例如下

例題

5. 已知實數 x 滿足 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & 2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^3 \end{vmatrix} = 0$ ，求 x 的值

解：

已知實數 x 滿足 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 5 & -3 \\ x^2 & 25 & 9 \end{vmatrix} = 0$ ，求 x 的值

解：

因為

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 5 & -3 \\ x^2 & 25 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 5-x & -3-x \\ x^2 & 25-x^2 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-x & -3-x \\ 25-x^2 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

(依第一列降階展開)

已知實數 x 滿足 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 5 & -3 \\ x^2 & 25 & 9 \end{vmatrix} = 0$ ，求 x 的值

解：

$$\begin{aligned} &= (5-x)(3+x) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5+x & 3-x \end{vmatrix} \\ &\quad \text{(提出公因式)} \\ &= (5-x)(3+x) \times 8 \end{aligned}$$

所以方程式可改寫為 $(5-x)(3+x) \times 8=0$

解得 $x = 5$ 或 -3

所以三個向量決定的平行六面體之體積也可用三階行列式表示如下

三階行列式的幾何意義

在空間中，由不共平面的三個向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 所決定的平行六面體之體積為

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right|$$

練習使用三階行列式求平行六面體的體積

例題

6. 求向量 $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, -2)$, $\vec{c} = (3, -2, 1)$ 所決定的平行六面體之體積

解：

已知向量 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (2, k, -1)$, $\vec{c} = (-1, 1, 3)$ 所決定的平行六面體之體積為 5，求實數 k 的值

解：

利用三階行列式的幾何意義，得

$$\left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & k & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = 5$$

$$\text{展開得 } |6k + 1 - 2 + 2 - 6 - k| = 5 \Rightarrow |5k - 5| = 5$$

解得 $k = 2$ 或 0

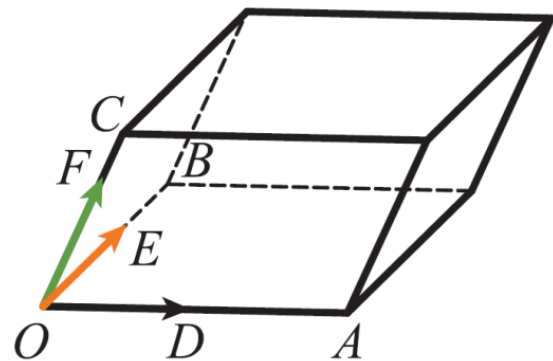
例題

7. 已知向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 所決定的平行六面體之體積為 4，求向量

解： $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - 2\vec{c}$, \vec{c} 所決定的平行六面體之體積

例題

圖是一個體積為24的平行六面體。已知 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$
 $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ ，求向量 \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} , \overrightarrow{OF} 所決定的
 平行六面體之體積



解：

設

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3), \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3), \overrightarrow{OC} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\text{因為 } \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

圖是一個體積為24的平行六面體。已知 $\overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{OA}$
 $\overline{OE} = \frac{2}{3}\overline{OB}$, $\overline{OF} = \frac{3}{4}\overline{OC}$ ，求向量 \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} , \overrightarrow{OF} 所決定的
 平行六面體之體積

解：

所以利用三階行列式的幾何意義，得所求體積為

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_3 \\ \frac{2}{3}b_1 & \frac{2}{3}b_2 & \frac{2}{3}b_3 \\ \frac{3}{4}c_1 & \frac{3}{4}c_2 & \frac{3}{4}c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \times 24 = 6$$

三個向量共平面的條件

在空間中，若三個向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 共平面，則 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

反之亦成立

應用此條件可以判斷空間中四點是否落在同一平面上

例題

8. 在空間中，已知四點 $O(0, 0, 0)$ ， $A(1, 1, 1)$ ， $B(2, 3, 1)$
 $C(1, 4, a)$ 落在同一平面上，求實數 a 的值

解：

在空間中，已知四點 $A(1, 1, 1)$ ， $B(2, 1, 0)$ ， $C(1, 2, 1)$
 $D(a, a, 3)$ 落在同一平面上，求實數 a 的值

解：

因為 A, B, C, D 四點落在同一平面上，所以三個向量

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1), \overrightarrow{AC} = (0, 1, 0), \overrightarrow{AD} = (a-1, a-1, 2)$$

共平面

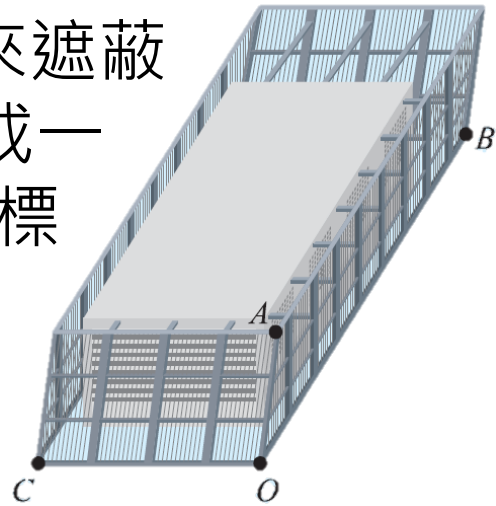
再由三個向量共平面的條件，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & a-1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 + (a-1) - 0 - 0 = 0$$

整理得 $a+1=0$ 解得 $a=-1$

例題

9. 某人設計一平行六面體造型的建築物來遮蔽電箱，如圖所示。現在將施工區設定成一個坐標空間，其中 O, A, B, C 四頂點的坐標如下： $O(0, 0, 0)$, $A(-1, 2, 2)$, $B(2, 2, 8)$, $C(5, 0, 0)$ 。求



- (1) 此建築物的體積為多少立方單位
- (2) 四片圍籬的面積共多少平方單位(四捨五入到整數位)

解：

例題

$$\text{Ending 1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 10$$

單元 4 結束

$$\begin{aligned} & \text{求} \begin{vmatrix} 5a_1 + a_2 & a_2 + 2a_3 & -a_3 - a_1 \\ 5b_1 + b_2 & b_2 + 2b_3 & b_3 - b_1 \\ 5c_1 + c_2 & c_2 + 2c_3 & 3c_1 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ & = 10 \times \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} \\ & = 30 \end{aligned}$$

Ending 2: $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

若 $\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{vmatrix} = 10$, 则 $\begin{vmatrix} \vec{b} \times \vec{c} \\ \vec{c} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10^2$

Sol.

$$\begin{vmatrix} 15 & 19 & 10 \\ 10 & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{b} \times \vec{c} & \vec{c} \times \vec{a} & \vec{a} \times \vec{b} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) & \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) & \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) & \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) & \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) & \vec{c} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) & \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \end{vmatrix} = 10^3$$