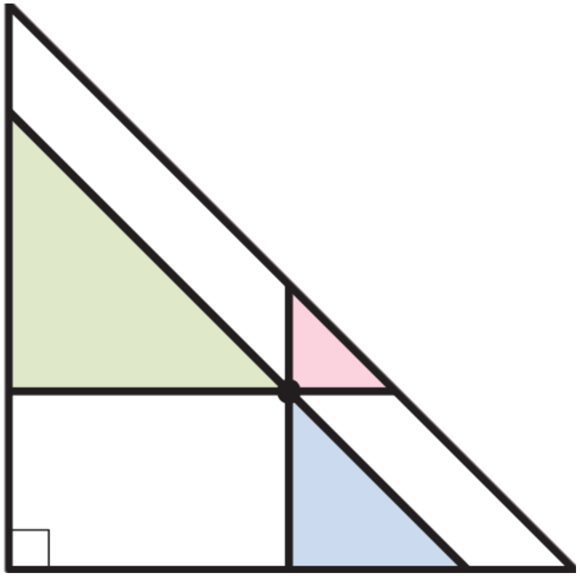
單元 3 空間向量的運算

3 空間向量的運算

如圖，為了校慶，學校在廣場畫了一個等腰直角三角形
計畫在三角形內部取一點，
過此點分別作三條平行於三邊的直線，
得出另三個等腰直角三角形，
分別漆上綠色、藍色與紅色的底漆，
再分配給三個年級各一個，供學生在上面創作

當內部這一點處於什麼位置時
才能使底漆的材料費最低？

這個問題可以用本節將要介紹
的柯西不等式解出



甲、空間向量的內積

空間中兩向量必共平面，其內積的定義與平面向量相同敘述如下

內積的定義

空間中，當兩個非零向量$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為θ $(0°\leq\theta\leq180°)$時，定義$\vec{a}$與$\vec{b}$的內積為

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

另外，規定任意向量$\vec{a}$與$\vec{0}$的內積為0，即$\vec{a}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{a}=0$

甲、空間向量的內積

我們知道

平面向量$\vec{a}=(a_1,a_2)$與$\vec{b}=(b_1,b_2)$的內積坐標表示為

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

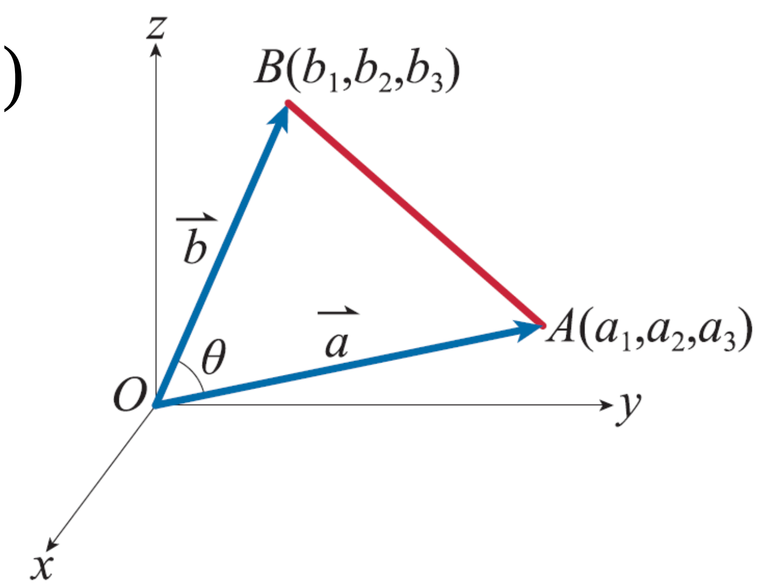
那麼空間向量的內積坐標表示為何呢？

現在仿照平面向量的方法推導空間向量的內積坐標表示

設$\vec{a}=\overline{OA}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=\overline{OB}=(b_1,b_2,b_3)$

為空間中兩個不平行的非零向量

且其夾角為θ，如圖所示



甲、空間向量的內積

當$\vec{a}$與$\vec{b}$平行或有一為零向量時，上式仍成立(請自行驗證)

因此，如同平面向量，兩個空間向量的內積也等於它們對應分量的乘積之和

內積的坐標表示

若$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$是空間中任意兩向量

則$\vec{a}$與$\vec{b}$的內積為

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

甲、空間向量的內積

有了這個公式，當向量$\vec{a}$與$\vec{b}$用坐標表示時，內積$\vec{a}\cdot\vec{b}$就很容易求得，此時可以反過來，利用內積的定義

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$，求兩向量的夾角，即

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

例題

1. 已知 $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(1,-2,-1)$，求

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的值。(2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角。

解：

隨堂

已知 $A(1, 2, 1)$, $B(3, 5, 2)$, $C(6, -1, 0)$ 為空間中三點，求

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值。(2) $\angle BAC$ 的度數。

解：

(1) 因為 $\overrightarrow{AB} = (2,3,1), \overrightarrow{AC} = (5,-3,-1)$

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\times5+3\times(-3)+1\times(-1)=0$

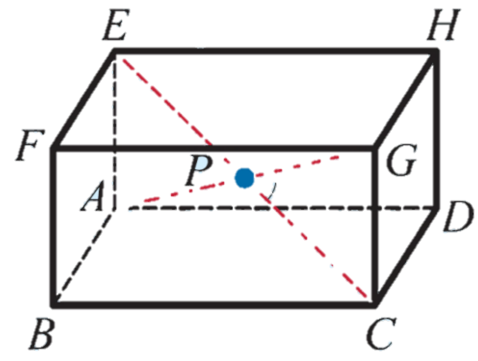
(2) 因為 $\cos\angle BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 0$

所以 $\angle BAC = 90^\circ$

將立體圖形放在空間坐標系中，可利用內積的定義及其坐標表示求角度

例題

2. 圖是一個長方體，且兩對角線 $\overline{AG}$ 與 $\overline{CE}$ 相交於P點。已知$\overline{AB}=\overline{AE}=2, \overline{AD}=4$ 求$\cos(\angle GPC)$的值及$\angle GPC$ 的度數(度數四捨五入到整數位)

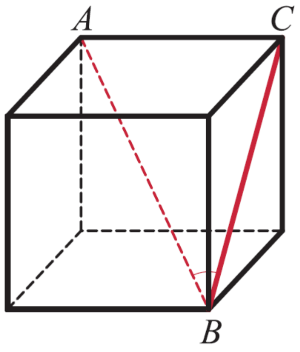


解：

例題

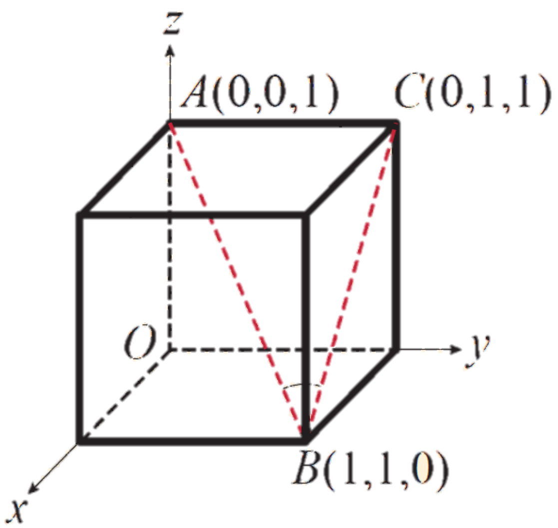
隨堂

圖是一個正立方體。已知其邊長為1，求$\cos(\angle ABC)$的值及$\angle ABC$的度數(度數四捨五入到整數位)



解：

將正立方體放在空間坐標系中，並標示A,B,C的坐標，如圖所示



因為$\overrightarrow{BA}=(-1,-1,1),\overrightarrow{BC}=(-1,0,1)$

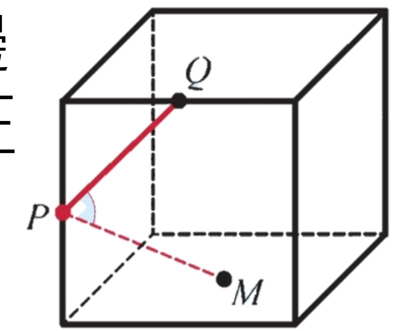
所以$\cos(\angle ABC)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

$$=\frac{(-1)\times(-1)+(-1)\times 0+1\times 1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}\times\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

利用計算機，可得$\angle ABC\approx 35°$

例題

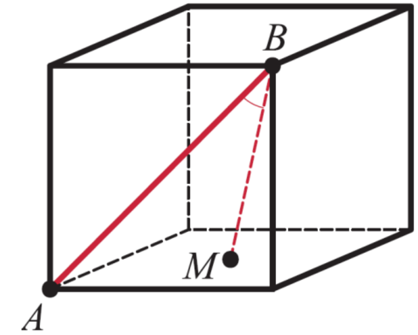
3. 圖是一個正立方體，且 P,Q 分別為所在邊的中點，M 為底面正方形的中心。已知正方體的邊長為 2，求$\angle QPM$的度數。



解：

隨堂

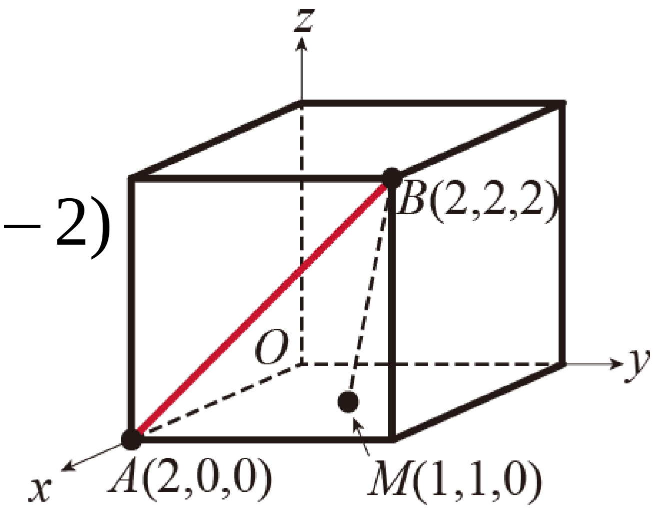
圖是一個正立方體，且 M 為底面正方形的中心。已知正立方體的邊長為 2，求 $\angle ABM$的度數



解：

將正立方體放在坐標空間中，

並標示A,B,M的坐標，如圖所示



因為 $\overrightarrow{BM}=(-1,-1,-2),\overrightarrow{BA}=(0,-2,-2)$

所以 $\cos\angle ABM=\dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|}$

$$=\frac{(-1)\times 0+(-1)\times(-2)+(-2)\times(-2)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2}\times\sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}\times\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故$\angle ABM=30^\circ$

內積可以用來判定兩向量是否垂直，說明如下

設$\vec{a}$與$\vec{b}$為空間中兩非零向量

若$\vec{a}\perp\vec{b}$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=0$

反之，若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，則$\cos\theta=0$，得$\theta=90^\circ$，即$\vec{a}\perp\vec{b}$

因此，有以下的結論

兩向量垂直的判定

設$\vec{a}$與$\vec{b}$為空間中兩非零向量

(1)若$\vec{a}\perp\vec{b}$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(2)若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，則$\vec{a}\perp\vec{b}$

由上可知，兩個非零向量是否垂直，可以由其內積是否為0來判定

例題

4. 設向量$\vec{a}=(2,1,-6),\vec{b}=(3,2,-1),\vec{c}=(5,2,s)$

(1)已知$\vec{a}\perp\vec{c}$，求實數s的值

(2)已知$\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，求實數$t$的值

解：

隨堂

已知$A(1, 1, 1)$, $B(6, 3, 1)$為空間中兩點，且x軸上一點C滿足$\angle ACB=90°$，求C點的坐標

解：

設C點的坐標為$(x, 0, 0)$

因為$\angle ACB = 90°$，所以$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

因此$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (1-x,1,1)\cdot(6-x,3,1) = 0$

$$\Rightarrow (1-x)(6-x)+1\times 3+1\times 1 = 0$$

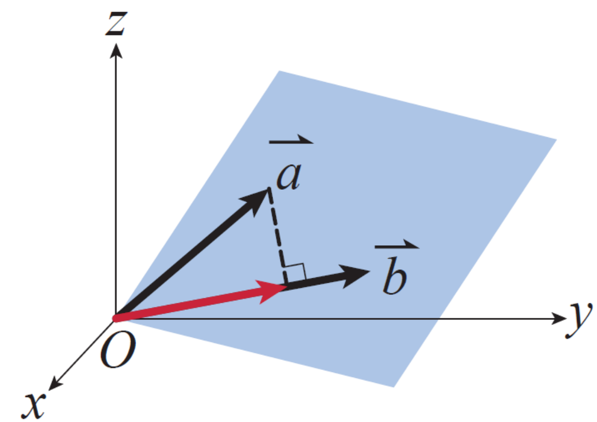
$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

解得$x= 2, 5$

故C點的坐標為$(2, 0, 0)$或$(5, 0, 0)$

乙、正射影

設$\vec{a},\vec{b}$是空間中兩向量，且$\vec{b}\neq\vec{0}$
因為求$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影時，整個圖形都落在$\vec{a}$與$\vec{b}$所決定的平面上，如右圖
所以之前在平面向量單元中得到的正射影公式，在空間向量中仍適用
因此，我們有以下的公式



正射影公式

空間中，向量$\vec{a}$在非零向量$\vec{b}$上的正射影為$\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$

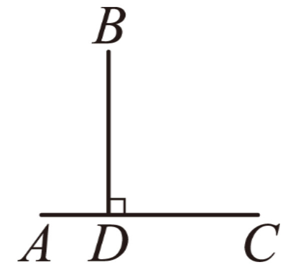
例題

5. 已知$\vec{a}=(4,5,2),\vec{b}=(1,2,2)$，求$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影及正射影的長

解：

隨堂

已知空間中三點 $A(1, 1, 1), B(7, 2, 2), C(3, 5, -3)$，且 B 點在 AC 直線上的投影點為 D，如圖所示，求



(1) $\overrightarrow{AD}$ 及 $\left|\overrightarrow{AD}\right|$ (提示: $\overrightarrow{AD}$ 為 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影)

(2) D 點的坐標

解：

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}=(6,1,1), \overrightarrow{AC}=(2,4,-4)$

因為 $\overrightarrow{AD}$ 為 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影

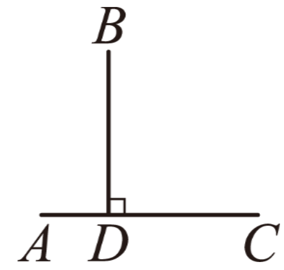
所以利用正射影公式，得

$$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}\right)\overrightarrow{AC}=\left(\frac{12+4-4}{6^2}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(2,4,-4)=(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$$

$$\text{且}\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=2$$

隨堂

已知空間中三點 $A(1, 1, 1), B(7, 2, 2), C(3, 5, -3)$，且$B$ 點在AC直線上的投影點為D，如圖所示，求



(1)$\overrightarrow{AD}$ 及$\left|\overrightarrow{AD}\right|$ (提示:$\overrightarrow{AD}$ 為 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$上的正射影)

(2) D 點的坐標

解：

(2)設D點的坐標為(x, y, z)

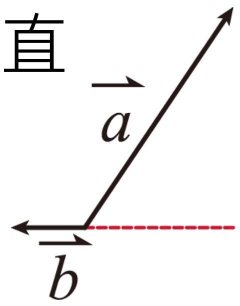
因為 $\overline{AD}=(x-1, y-1, z-1)=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$

所以 $x=\frac{5}{3}, y=\frac{7}{3}, z=-\frac{1}{3}$

故D點的坐標為 $\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right)$

例題

6. 將向量 $\overrightarrow{a}=(-1,4,3)$ 分解成兩個向量的和，其中一個向量與 $\overrightarrow{b}=(1,-2,-1)$ 平行，另一個向量與 $\overrightarrow{b}$ 垂直



解：

隨堂

已知 $\vec{a}=(3,4,4),\vec{b}=(2,1,2)$，且$\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$，其中$\vec{u}\ //\ \vec{b},\vec{v}\perp\vec{b}$
求向量$\vec{u}$與 $\vec{v}$

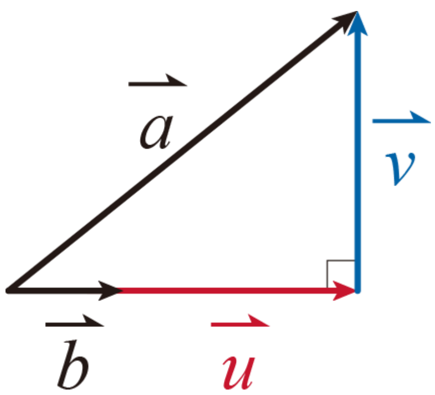
解：

如圖所示，$\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$且$\vec{u}$為$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影
利用正射影公式，得

$$\vec{u}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\vec{b}=\left(\frac{6+4+8}{3^2}\right)\vec{b}=2\vec{b}=(4,2,4)$$

又因為 $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$，所以

$$\vec{v}=\vec{a}-\vec{u}=(3,4,4)-(4,2,4)=(-1,2,0)$$



丙、柯西不等式

設$\vec{a},\vec{b}$為空間中兩非零向量，且其夾角為$\theta\,(0°\le\theta\le 180°)$
由向量內積的定義

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

及$\left|\cos\theta\right|\le 1$，得

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\cos\theta\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$

即

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$

我們稱此不等式為**柯西不等式**
當不等式的等號成立時，$\left|\cos\theta\right|=1$，即$\theta=0°$或$180°$，此時
$\vec{a}\,//\,\vec{b}$

柯西不等式

(1) **向量形式**：對於空間中任意兩向量$\vec{a},\vec{b}$，不等式

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$

恆成立，且等號成立於$\vec{a}//\vec{b}$或$\vec{a}$與$\vec{b}$中有一為零向量時

(2) **實數形式**：對於任意實數a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3，不等式

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$$

恆成立，且等號成立於存在實數t，使得

$a_1=tb_1,a_2=tb_2,a_3=tb_3$ 或 $b_1=ta_1,b_2=ta_2,b_3=ta_3$

另外，當$b_1b_2b_3\ne0$時，常將等號成立的條件寫成比例式

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

例題

7. 已知實數x,y,z滿足$x+4y+2z=9$，求$x^2+4y^2+z^2$的最小值，及此時x,y,z的值

解：

隨堂

已知實數 x, y, z 滿足 $x-y+z=3$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值，及此時 x, y, z 的值

解：

利用柯西不等式，得

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1^2+(-1)^2+1^2\right)\geq\left(x-y+z\right)^2$$

將 $x-y+z=3$ 代入，得

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\times 3\geq 3^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 3$$

而且當 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}=t$

即 $x=t, y=-t, z=t$ 時等號才成立

將其代入 $x-y+z=3$，得 $3t=3$

解得 $t=1$

故當 $x=1, y=-1, z=1$ 時，$x^2+y^2+z^2$ 有最小值3

例題

8. 已知實數 x , y , z 滿足 $x^2+4y^2+9z^2=3$，求 $x-2y+3z$ 的最大值與最小值，及此時 x , y , z 的值

解：

例題

隨堂

已知實數 x,y,z 滿足 $x^2+4y^2+4z^2=9$，求 $x+4y-4z$ 的最大值與最小值，及此時 x,y,z 的值

解：

利用柯西不等式，得

$$\left(x^2+(2y)^2+(2z)^2\right)\left(1^2+2^2+(-2)^2\right)\ge\left(x+4y-4z\right)^2$$

將 $x^2+4y^2+4z^2=9$ 代入，得

$$9\times9\ge\left(x+4y-4z\right)^2\Rightarrow-9\le x+4y-4z\le9$$

而且當 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{2y}{2}=\dfrac{2z}{-2}=t$

即 $x=t,y=t,\ z=-t$ 時等號才成立

將其代入 $x^2+4y^2+4z^2=9$，得 $9t^2=9$

解得 $t=\pm1$

隨堂

已知實數 x, y, z 滿足 $x^2+4y^2+4z^2=9$，求 $x+4y-4z$ 的最大值與最小值，及此時 x, y, z 的值

解：

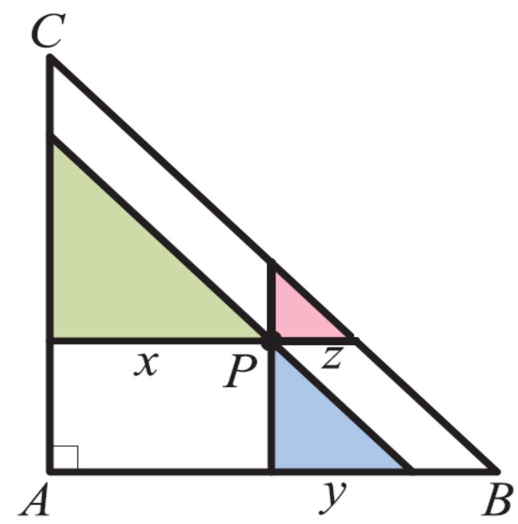
即$(x, y, z)=(1, 1, -1)$或$(-1, -1, 1)$

故當 $x=1, y=1, z=-1$時，$x+4y-4z$ 有最大值 9

當 $x=-1, y=-1, z=1$時，$x+4y-4z$ 有最小值-9

例題

9. 如圖，為了校慶，學校在廣場上畫了一個腰長為 6 公尺的等腰直角三角形 ABC，計畫在三角形內部取一點 P，過 P 點分別作三條平行於三邊的直線，得出三個腰長分別為 x , y , z 公尺的等腰直角三角形，分別漆上綠色、藍色與紅色的底漆，再分配給三個年級各一個，供學生在上面創作。



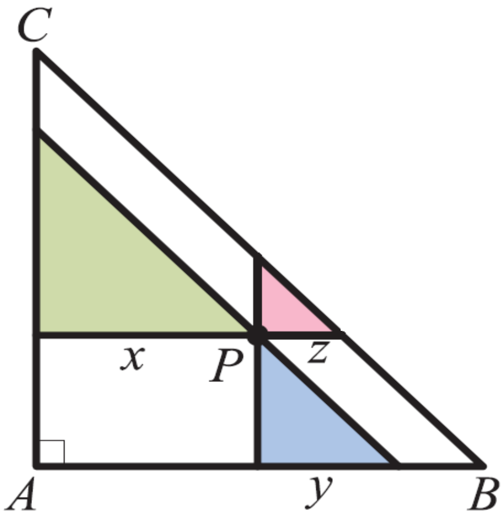
(1) 求 $x+y+z$ 的值

(2) 已知綠色、藍色與紅色的底漆每平方公尺分別為 100、400與400元，求底漆材料的最低費用

例題

9. 如圖

(1) 求 $x+y+z$ 的值

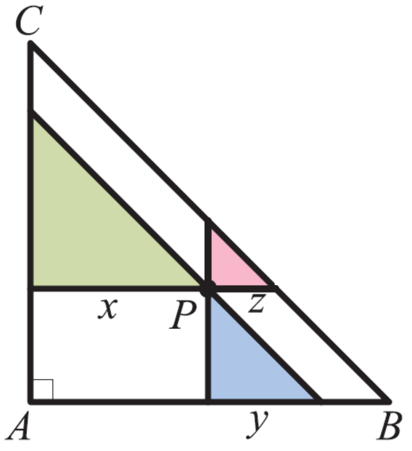


解：

例題

(2) 已知綠色、藍色與紅色的底漆每平方公尺分別為100、400與400元，求底漆材料的最低費用

解：



隨堂

將一條長為12的繩子截成三段，各自圍成一個正方形，如圖所示。怎樣截法才能使這三個正方形面積總和最小呢？並求出該最小值。

解：

設三段繩長分別為 x, y, z，則 $x+y+z=12$

且三個正方形的面積之和為

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

利用柯西不等式，得

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq(x+y+z)^2$$

將 $x+y+z=12$代入，整理得$x^2+y^2+z^2\geq\frac{144}{3}=48$

隨堂

將一條長為12的繩子截成三段，各自圍成一個正方形，如圖所示。怎樣截法才能使這三個正方形面積總和最小呢？並求出該最小值。

解：

而且當 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}=t$

即 $x=t$, $y=t$, $z=t$ 時，等號成立

將其代入 $x+y+z=12$

得 $3t=12$，解得 $t=4$

即 $x=y=z=4$

故當 $x=y=z=4$(三段繩長都是 4)時

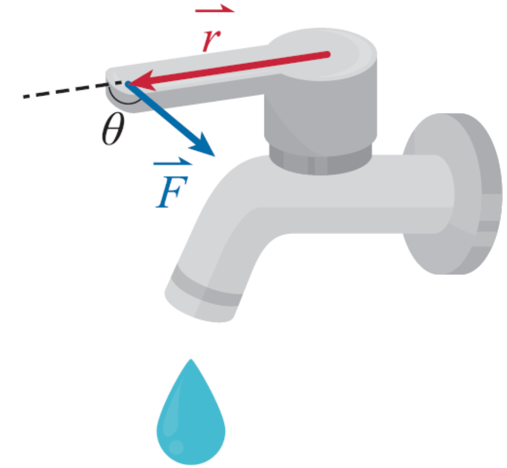
三個正方形的面積之和有最小值 $\dfrac{1}{16}\times 48=3$

丁、空間向量的外積

轉動水龍頭的握柄讓水流出，就產生了「力矩」

力矩是用來描述物體受力後轉動難易程度的物理量，具有大小與方向，也就是說，力矩是一個向量

例如在圖中，若轉軸中心(支點)到施力點的向量為$\vec{r}$，施力為$\vec{F}$，則所產生的力矩之



大小為$|\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$，其中$\theta$為$\vec{r}$與$\vec{F}$的夾角

方向與$\vec{r},\vec{F}$都垂直(這例子的方向為朝上)

數學上，將$\vec{r}$與$\vec{F}$這樣的運算關係，稱為向量$\vec{r}$與$\vec{F}$的**外積**

記作$\vec{r}\times\vec{F}$

底下我們先以坐標來定義空間向量的外積，再說明這樣的定義符合上述的大小與方向

空間向量的外積

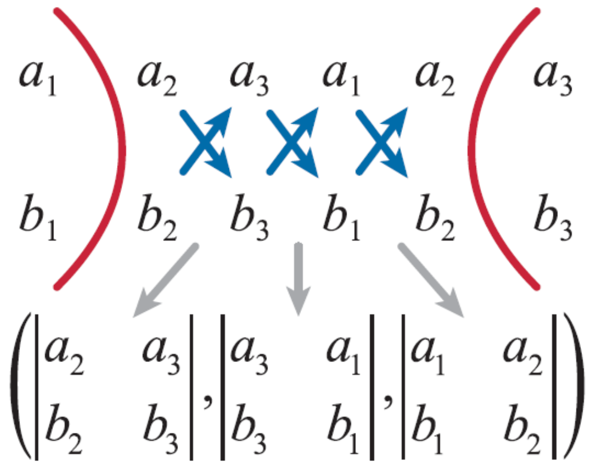
當$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$為空間中兩向量時

稱向量$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$為$\vec{a}$與$\vec{b}$的外積

記作$\vec{a}\times\vec{b}$，即

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

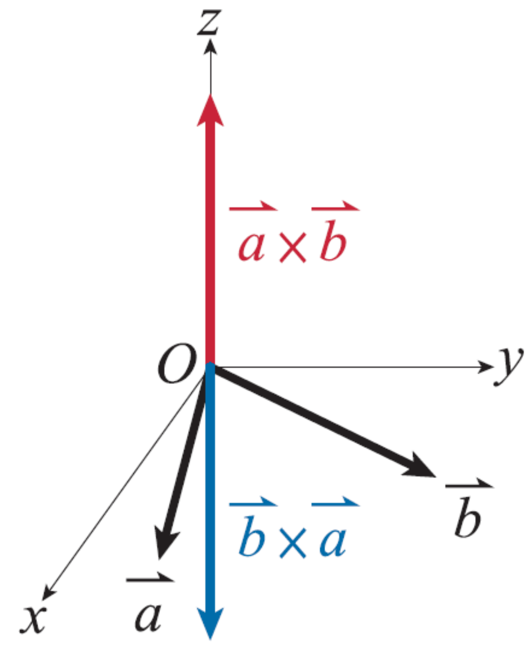
我們可以使用下圖來記憶外積的定義，說明如下
先將$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$各寫兩次， 再將左右兩行去掉，交叉部分所形成的二階行列式值就是外積 $\vec{a}\times\vec{b}$的三個分量



例題

10. 已知向量 $\vec{a}=(2,1,0),\vec{b}=(1,2,0)$，求 $\vec{a}\times\vec{b}$ 與 $\vec{b}\times\vec{a}$

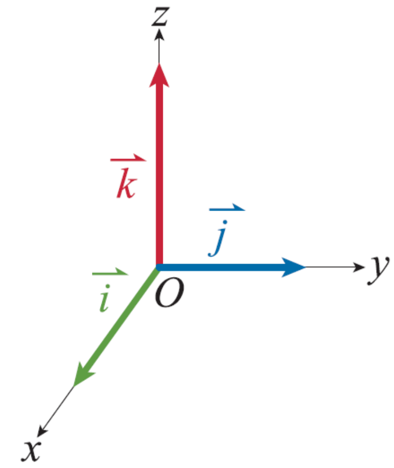
解：



隨堂

已知向量 $\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)$，證明

(1) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ 。 (2) $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ 。



解：

由外積的定義，得

$$(1)\vec{i}\times\vec{j}=\left(\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)=(0,0,1)=\vec{k}$$

$$(2)\vec{j}\times\vec{i}=\left(\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\right)=(0,0,-1)=-\vec{k}$$

關於空間向量的外積，要注意的是

(1) 向量的內積是一個「實數」，但向量的外積卻是一個「向量」

(2) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行或有一為零向量，則由外積的定義得知 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

(3) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩不平行的非零向量，則 $\vec{a}\times\vec{b}$ 與 $\vec{a},\vec{b}$ 都垂直

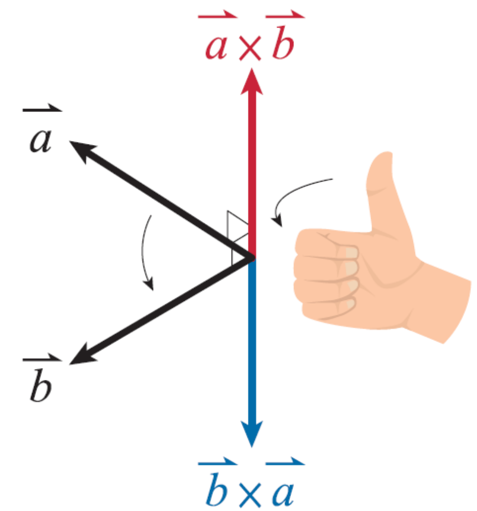
說明如下

因為 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=(a_1,a_2,a_3)\cdot\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$

$$
\begin{aligned}
&=(a_1,a_2,a_3)\cdot\left(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\right)\\
&=a_1\left(a_2b_3-a_3b_2\right)+a_2\left(a_3b_1-a_1b_3\right)+a_3\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\\
&=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1\\
&=0
\end{aligned}
$$

所以 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\perp\vec{a}$。同理可得 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\perp\vec{b}$

在例題10的隨堂練習中，外積 $\vec{i}\times\vec{j}$ 的方向恰好與空間坐標系的「右手系」一致

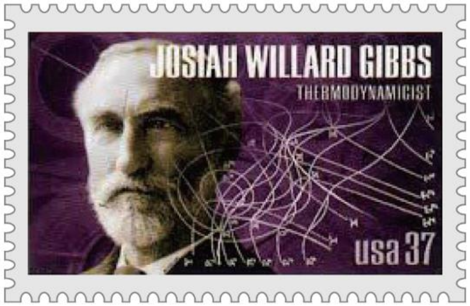


一般而言，外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向定法如下

將右手拇指以外的四指併攏，指向 $\vec{a}$ 的方向，然後向 $\vec{b}$ 握拳，此時拇指所指的方向就是 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向，如圖所示

由例題10可知 $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$，即外積不具有交換律

又由外積的定義可知，$\vec{a}\times\vec{b}$ 和 $\vec{b}\times\vec{a}$ 的長度相等，但方向相反，即 $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$



<u>吉布斯</u>

(J. W. Gibbs，美國，1839~1903)

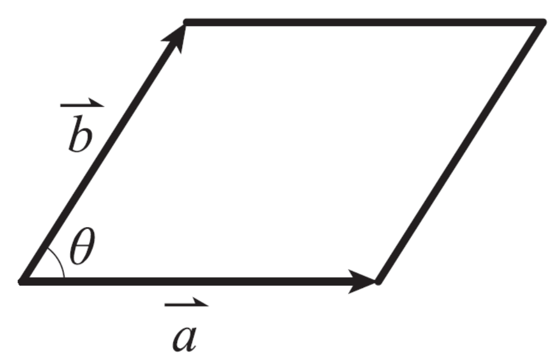
引進外積的概念，是向量分析學的創始者

知道了外積$\vec{a}\times\vec{b}$的方向，至於它的長度又有何意義呢？
它的長度$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$恰好等於由$\vec{a}$與$\vec{b}$所決定的平行四邊形面積

說明如下

設$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$與$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$為空間中兩不平行的非零向量，且其夾角為θ，如圖所示

$\vec{a}$與$\vec{b}$所決定的平行四邊形面積為



$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\theta}$$

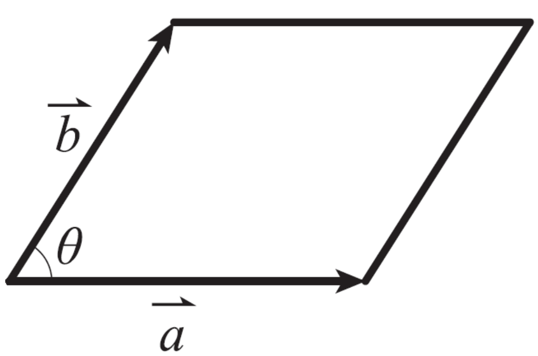
$$=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2\right)\left({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}$$

$$=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$



平行四邊形的面積與外積的長度

當 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩個不平行的非零向量時，由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所決定的平行四邊形面積等於外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的長度 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

例題

11. 已知向量 $\vec{a}=(1,1,2),\vec{b}=(1,-2,-1)$，求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 決定的平行四邊形面積

解：

法1) $\text{平}(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\sqrt{6\times6-(-3)^2}=3\sqrt{3}$

法2) $|\vec{a}\times\vec{b}|$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$(3,3,-3)$

$=3\sqrt{3}$

隨堂

已知向量 $\vec{a}=(1,2,-2),\vec{b}=(2,1,2)$，求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所決定的平行四邊形面積

解：

因為

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}2 & -2\\1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 1\\2 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}\right)=(6,-6,-3)$$

所以 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所決定的平行四邊形面積為

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}=9$$

空間中，給定三角形的三個頂點坐標，利用外積可求得此三角形的面積

例題

12. 已知空間中三點$A(1, -1, 1)$, $B(-3, 2, 1)$, $C(5, -4, 3)$
求$\triangle ABC$ 的面積 $=5$

解：

$\overrightarrow{AB}=(-4,3,0)$, $\overrightarrow{AC}=(4,-3,2)$

$$\begin{array}{cccccc} -4 & 3 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$(6,8,0)$

隨堂

已知空間中三點 $A(-1,-1,-2)$，$B(0,1,1)$，$C(2,1,-1)$
求$\triangle ABC$的面積

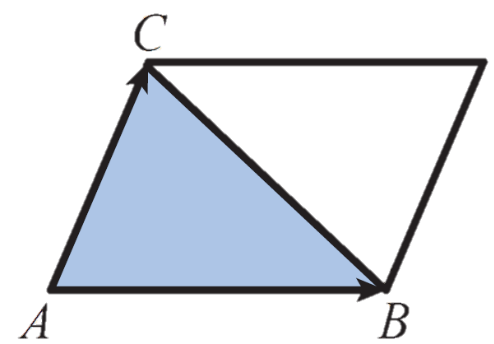
解： 因為$\overrightarrow{AB}=(1,2,3),\overrightarrow{AC}=(3,2,1)$，所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}\right)=(-4,8,-4)$$

又因為$\triangle ABC$的面積等於由 $\overrightarrow{AB}$ 與$\overrightarrow{AC}$ 所決定的平行四邊形面積的一半

所以$\triangle ABC$的面積為

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+8^2+(-4)^2}=2\sqrt{6}$$



在空間中，我們可以利用外積$\vec{a}\times\vec{b}$尋找與$\vec{a},\vec{b}$都垂直的向量，

例題

13. 已知向量 $\vec{n}$ 與 $\vec{a}=(2,-1,0)$，$\vec{b}=(4,-1,-1)$ 都垂直，且 $|\vec{n}|=6$，求 $\vec{n}$

解：

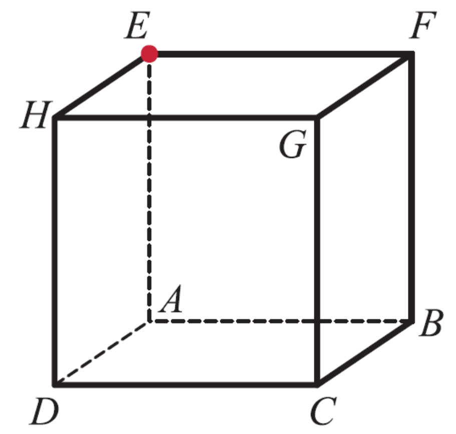
$$\begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ \hline & 1, & 2, & 2 & & \end{array}$$

$\therefore \vec{n} = \pm 2(1,2,2)$

都垂直 → 公垂向量 → 外積

隨堂

圖是空間中的一個長方體，且$ABFE$是正方形。已知四個頂點坐標為$A(0, 0, 0)$，$B(1, 1, 2)$，$D(1, -1, 0)$，$E(x, y, z)$，其中$z>0$，求x，y，z的值



解：

向量$\overrightarrow{AD}=(1,-1,0)$, $\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$, $\overrightarrow{AE}=(x,y,z)$

外積$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-2,-2,2)$

因為(1)$\overrightarrow{AE}$與$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}$平行

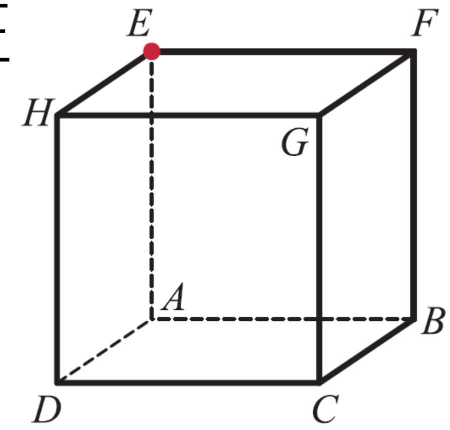
(2)$\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{3}$

(3)$\left|\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6}$

(4)$z>0$

隨堂

圖是空間中的一個長方體，且$ABFE$是正方形。已知四個頂點坐標為$A(0, 0, 0)$，$B(1, 1, 2)$，$D(1, -1, 0)$，$E(x, y, z)$，其中$z>0$，求 x，y，z 的值



解：

$$\text{所以}\overrightarrow{AE}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(-2,-2,2)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$\text{故}\, x=-\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}, z=\sqrt{2}$$

※本單元的柯西不等式(實數形式)對任意6個實數都成立

事實上，柯西不等式對2n個實數仍然成立，敘述如下

若$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$是2$n$個實數，則不等式

$$\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}\right)\left(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+\cdots+b_n^{\ 2}\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$$

恆成立

這證明省略

現在我們利用柯西不等式，說明二維數據分析中，

相關係數

$$r=\frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+\cdots+(x_n-\mu_x)(y_n-\mu_y)}{\sqrt{(x_1-\mu_x)^2+(x_2-\mu_x)^2+\cdots+(x_n-\mu_x)^2}\times\sqrt{(y_1-\mu_y)^2+(y_2-\mu_y)^2+\cdots+(y_n-\mu_y)^2}}$$

的值恆在−1與1之間

$-1\leq r\leq 1$

令$a_i = x_i - \mu_x, b_i = y_i - \mu_y, i = 1, 2, 3, \cdots, n$

則相關係數

$$r = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \cdots + a_n^{\ 2}} \times \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \cdots + b_n^{\ 2}}}$$

將柯西不等式

$$\left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \cdots + a_n^{\ 2}\right)\left(b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \cdots + b_n^{\ 2}\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2$$

移項得

$$1 \geq \frac{\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2}{\left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \cdots + a_n^{\ 2}\right)\left(b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \cdots + b_n^{\ 2}\right)}$$

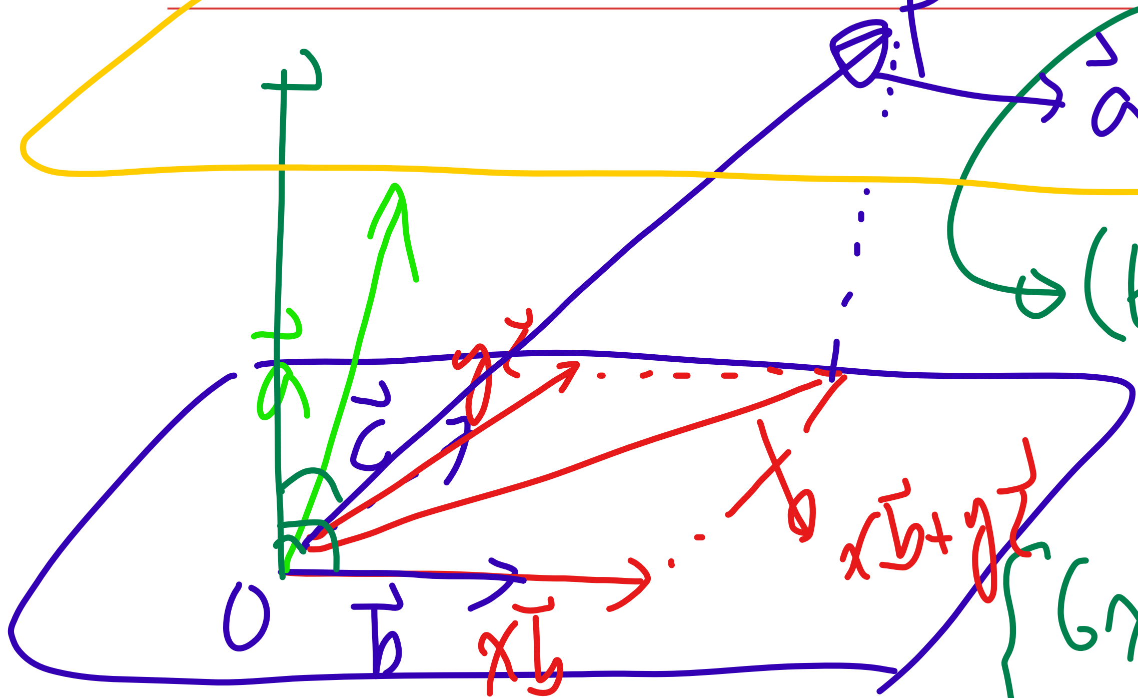
因此$1 \geq r^2$，即$-1 \leq r \leq 1$

故相關係數r的值恆在-1與1之間

Ending 1: $\vec{a}=(6,2,4)$, $\vec{b}=(-1,2,-1)$, $\vec{c}=(2,-1,1)$

單元 3 結束

求 $|\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}| = \min$



$\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}$

$(6-x+2y, 2+2x-y, 4-x+y)$

$(-1,2,-1)$, $(2,-1,1)$

$$\begin{cases} 6x+(-5)y=6 \\ -5x+6y=-14 \end{cases}$$

$\therefore 11x=-34 \quad \therefore x=-\frac{34}{11},\ y=-\frac{54}{11}$

法二) $|\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}|=\sqrt{(6-x+2y)^2+(2+2x-y)^2+(4-x+y)^2}$

$$\left[(6-x+2y)^2+(2+2x-y)^2+(4-x+y)^2\right]\left[\underbrace{1^2+(-1)^2+(-3)^2}_{11}\right]\ge\begin{pmatrix}6-x+2y\\-2-2x+y\\-12+3x-3y\end{pmatrix}^2$$

$$\begin{array}{cc|cc|cc}
-1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1\\
2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 1
\end{array}$$

$1,-1,-3$

$\therefore\ |\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}|\ge\sqrt{\dfrac{64}{11}}$

"=" 成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{6-x+2y}{1}=\dfrac{2+2x-y}{-1}=\dfrac{4-x+y}{-3}$

$$\begin{cases}x+y=-8 & 4\\7x-4y=-2\end{cases}\quad\therefore\ 11x=-34\Rightarrow x=-\frac{34}{11},\ y=-\frac{54}{11}.$$