單元 1 空間概念

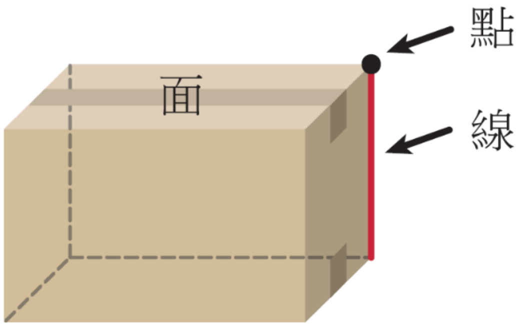
1 空間概念

生活在立體（三度）空間中，我們不但可以前後與左右移動，還可以上下移動。除活動範圍外，生活中所見的事物很多也是立體的，例如下圖中，形如長方體的大樓因此，有必要將討論的範圍由平面推展到空間。

本單元我們將採用直觀的概念，探討空間中的直線、平面及它們彼此之間的關係。

甲、點、線、面的基本事實

在空間中，點、線、面是構成圖形的基本物件，如下圖的長方體紙箱就可清楚看到點、線、面。



在空間中，點、線、面之間存在三個直觀上的基本事實敘述如下：

(1) 相異兩點決定唯一直線。

(2) 不共線的三點決定唯一平面。

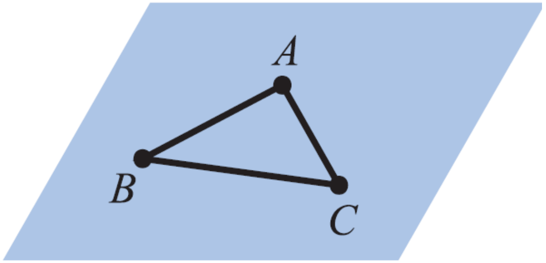
(3) 一平面中相異兩點所決定的直線落在此平面上。

甲、點、線、面的基本事實

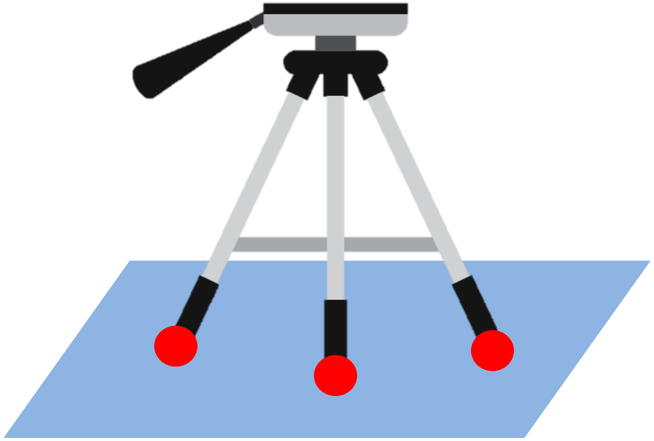
要注意的是：
直線的兩端可以無限延伸；平面可向各方向無限延伸，
是沒有厚度且平坦的幾何圖形。
在課文的空間圖形中，我們將以線段表示直線，
並以平行四邊形表示平面。

甲、點、線、面的基本事實

在空間中，不共線的三點 A, B 與 C 決定的平面，稱為**平面**ABC，如圖所示。



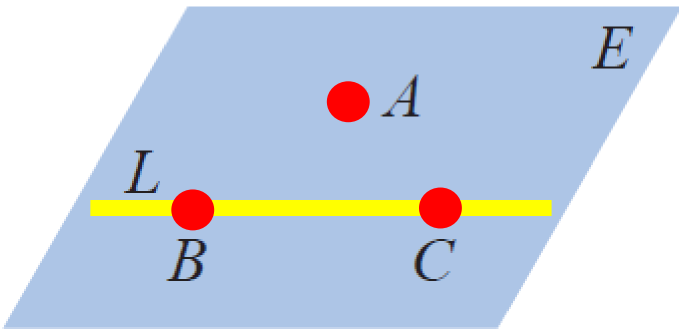
現實生活中，照相時使用的三腳架可在地面上穩穩站立是「不共線的三點決定唯一平面」這個事實的呈現。



甲、點、線、面的基本事實

空間中，兩直線在同平面上但不相交，稱此兩直線**平行**。
前面提過「不共線的三點決定唯一平面」，
事實上，下列各條件也可決定唯一平面：

(1) 一直線與不在此直線上的一點。
(2) 兩條相交於一點的直線。
(3) 兩條平行直線。



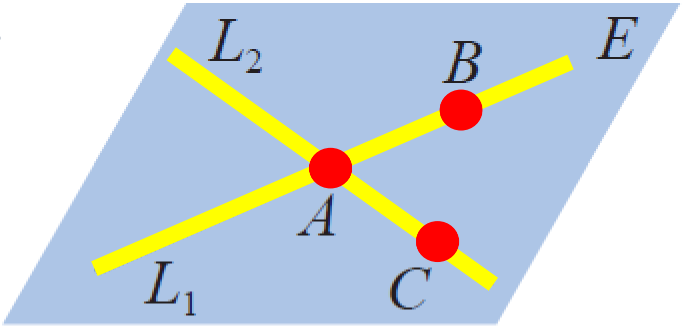
說明：

(1) 給定直線 L 與不在 L 上的一點 A，如圖所示。
在 L 上取相異兩點 B , C，則 A , B , C 三點不共線
由基本事實(2)可知，它們決定唯一平面 E；
再由基本事實(3)可知，平面 E 包含 L 且通過 A 點。

甲、點、線、面的基本事實

空間中，兩直線在同平面上但不相交，稱此兩直線平行。
前面提過「不共線的三點決定唯一平面」，
事實上，下列各條件也可決定唯一平面：

(1) 一直線與不在此直線上的一點。
(2) 兩條相交於一點的直線。
(3) 兩條平行直線。

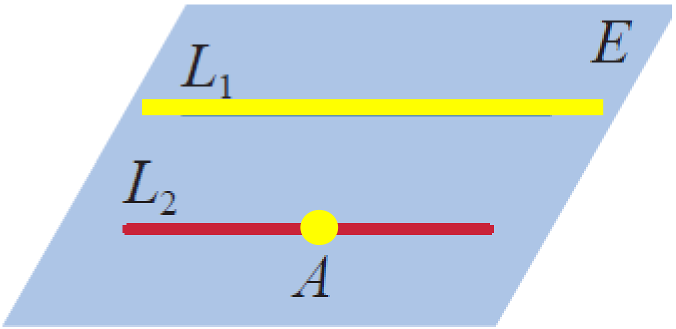


說明：

(2) 給定交於一點A的兩相異直線L_1與L_2，如圖所示。
在L_1上取異於A的一點B，在L_2上取異於A的一點C。
因為L_1與L_2相異，所以A,B,C三點不共線，
由基本事實(2)可知，它們決定唯一平面E。
再由基本事實(3)可知，L_1與L_2都落在平面E上。

甲、點、線、面的基本事實

空間中，兩直線在同平面上但不相交，稱此兩直線平行。
前面提過「不共線的三點決定唯一平面」，
事實上，下列各條件也可決定唯一平面：
(1) 一直線與不在此直線上的一點
(2) 兩條相交於一點的直線。
(3) 兩條平行直線。



說明：
(3) 給定兩平行直線L_1與L_2，如圖所示。
在L_2上取一點A，則直線L_1與A點決定唯一平面E
又因為兩平行直線L_1與L_2在同一平面上，
所以E必同時包含L_1與L_2。

底下，我們探討空間中
直線與直線、直線與平面、平面與平面的關係。

乙、直線與直線的關係

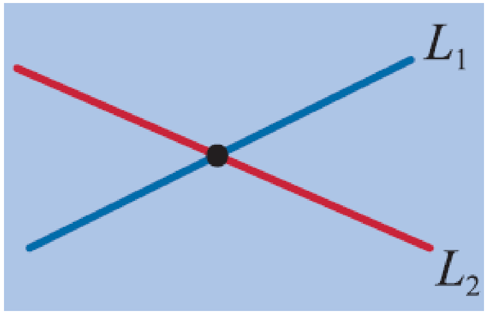
我們知道：在同一平面上，兩直線 L_1與 L_2的關係有以下三種：

(1) 直線L_1與L_2沒有交點，此時L_1與L_2平行，如圖(a)。

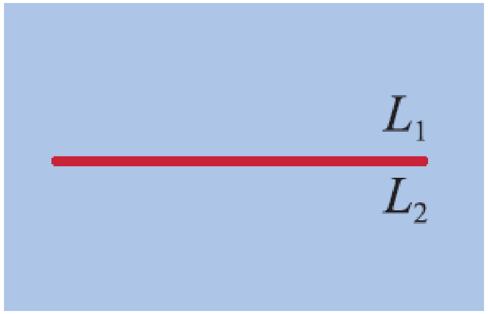
(2) 直線 L_1與 L_2交於一點，如圖(b)。

(3) 直線 L_1與 L_2至少交於兩點，此時 L_1與 L_2為同一直線稱L_1與 L_2重合，如圖(c)。

(a)



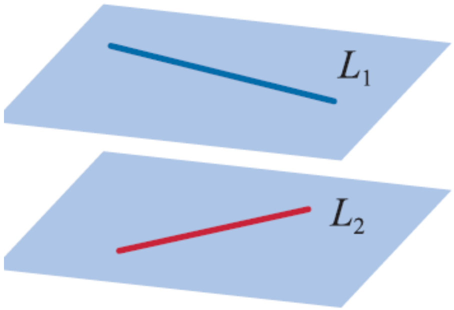
(b)

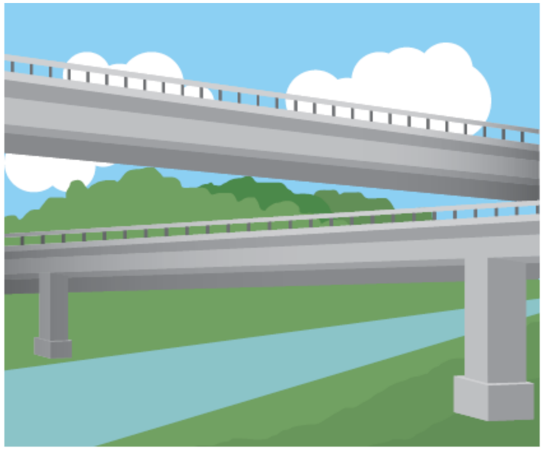


(c)

乙、直線與直線的關係

在空間中，當兩直線不相交時，它們可能在同一平面上也可能不在同一平面上。
若兩直線共平面但不相交，則此兩直線**平行**；
若兩直線不共平面，則稱此兩直線**歪斜**，如圖所示。
圖中交叉的橋梁就像歪斜線。





根據上一節的內容，兩相交直線（交於一點或重合）及兩平行直線都會共平面。
又因為兩歪斜線不會共平面，
所以「兩歪斜線既不相交也不平行」。

直線與直線的關係

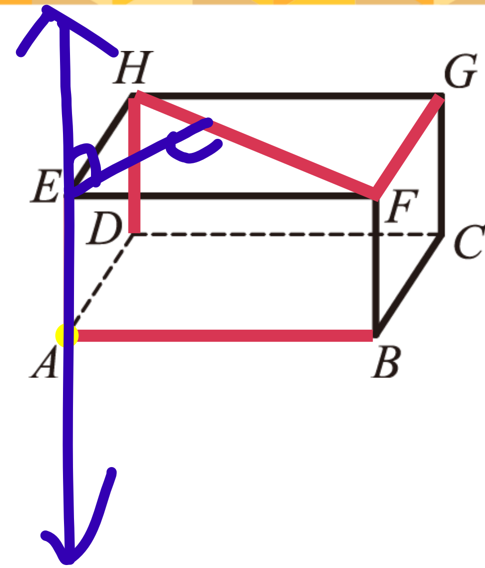
空間中兩直線的關係可以分成2類，共有4種情形：

(1) **兩直線共平面**：平行、交於一點與重合。
(2) **兩直線不共平面**：歪斜。

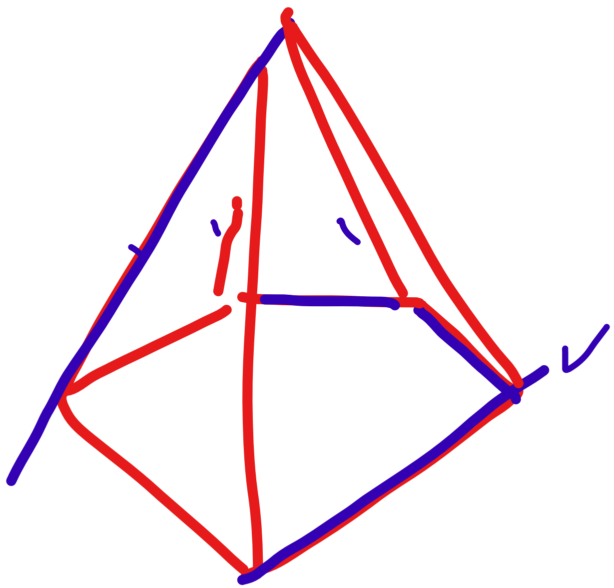
練習判定兩直線是否歪斜。

例題

1. 右圖是一個長方體，下列哪些直線與直線AE歪斜?
(1) 直線AB　(2) 直線DH
(3) 直線FG　(4) 直線FH。



解：



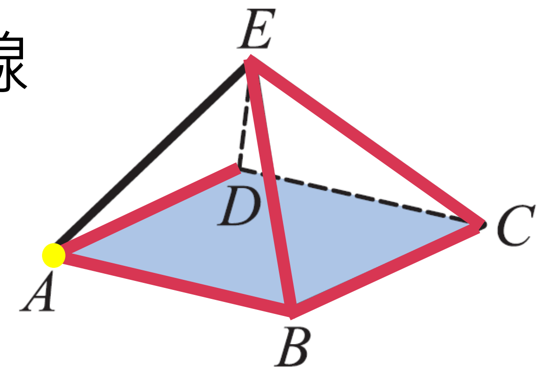
$$\frac{10\times3}{2}=15$$

隨堂

在右圖的立體圖形中，底面是正方形，四個側面都是正三角形。下列哪些直線與直線AD歪斜?

(1) 直線AB　(2) 直線BC

(3) 直線BE　(4) 直線CE。



解：

(1) 直線AB與直線AD相交於一點A。

(2) 因為直線BC與直線AD是矩形$ABCD$的對邊，所以直線BC與直線AD平行。

(3) 因為直線BE與直線AD不在同一個平面上，所以直線BE與直線AD歪斜。

(4) 因為直線CE與直線AD不在同一個平面上，所以直線CE與直線AD歪斜。

故選(3)(4)。

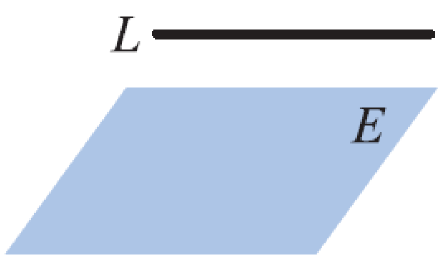
丙、直線與平面的關係

在空間中，直線L與平面E的關係，有以下三種：

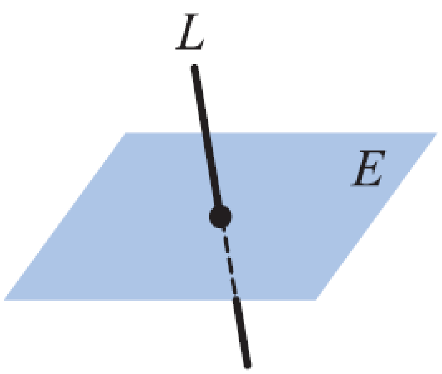
(1) 直線L與平面E不相交，此時稱L與E **平行**，如圖(a)。

(2) 直線L與平面E交於一點，如圖(b)。

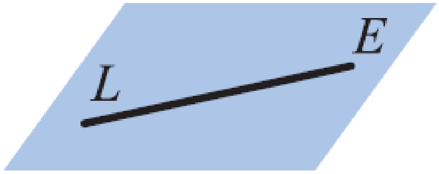
(3) 直線L落在平面E上，此時L與E有無限多個交點，如圖(c)。



(a)



(b)

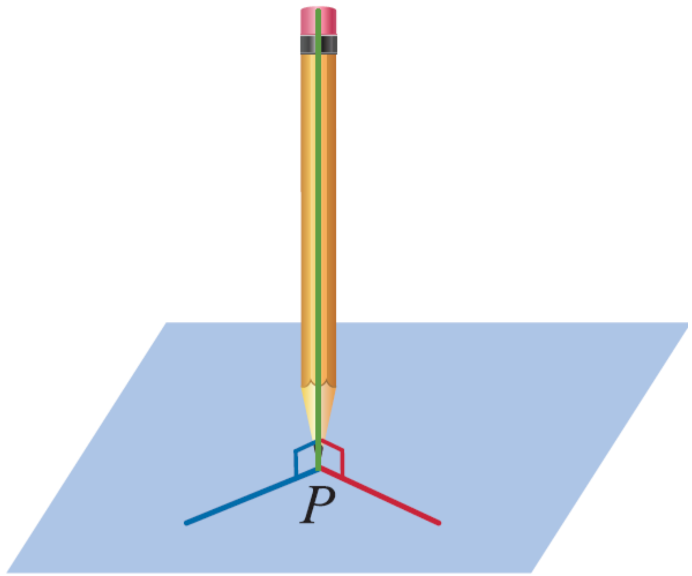


(c)

丙、直線與平面的關係

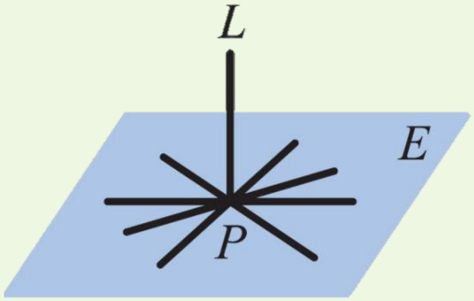
在空間中，兩直線垂直的概念很容易了解，因為空間中交於一點的兩直線必定共平面，所以其夾角的意義與平面上兩直線夾角相同。當空間中兩直線L_1與L_2的夾角為直角時，仍稱L_1與L_2垂直，記作$L_1 \perp L_2$。但是，當直線L與平面E交於一點時，如何定義直線L與平面E垂直？

先觀察右圖，想要讓筆直立於桌面就必須環視筆的各個方向都不偏斜也就是說，在桌面上所有通過立足點P的直線都要和筆垂直。因此，有以下的定義。



直線與平面垂直的定義

當直線L和平面E相交於P點，而且E上通過P點的每條直線都和L垂直時，稱直線L與平面E垂直，並以$L \perp E$表示。

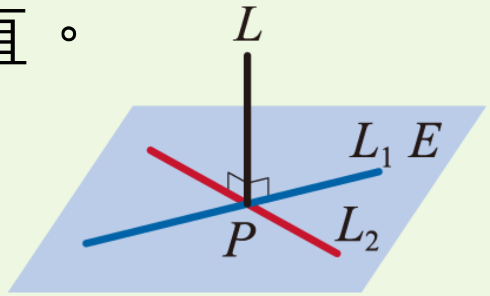


根據以上定義，要判定直線L與平面E是否垂直，就要檢查平面E上通過P點的每一條直線是否都與直線L垂直但這樣的直線有無限多條，要怎麼檢查呢？

事實上，因為兩條交於一點的直線決定唯一平面，所以只要檢查通過P點的兩條直線是否與L垂直就足夠因此，我們有底下的判定方法

直線與平面垂直的判定方法

設直線L和平面E相交於P點。在平面E上若有通過P點的兩條相異直線 L_1與L_2都和L垂直則直線L與平面E垂直。



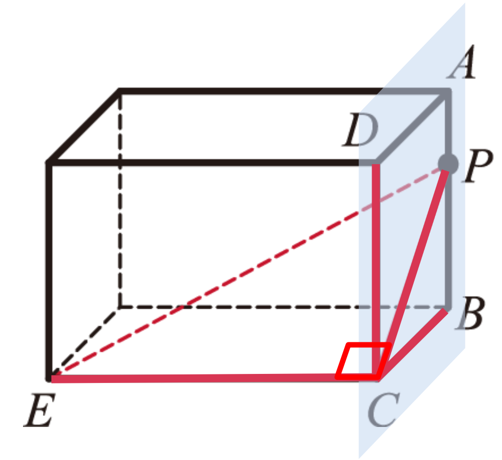
例題

2. 右圖是一個長方體，P點為 $\overline{AB}$上一點，且$\overline{PB}$ =3，$\overline{BC}$ = 4，$\overline{CE}$ = 12。

(1) 試問直線CE與平面ABC是否垂直？

(2) 試問直線CE與直線CP是否垂直？

(3) 求 $\overline{EP}$的長。



解：

例題

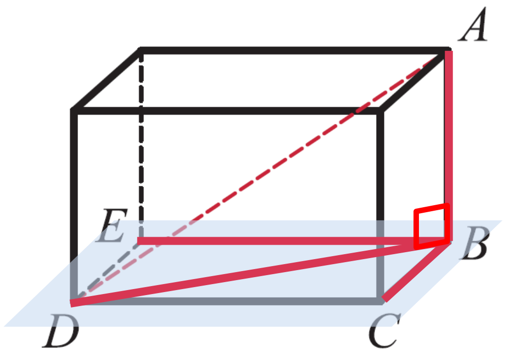
隨堂

右圖是一個長方體，且$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=6$。

(1) 試問直線AB與平面BCE是否垂直？

(2) 試問直線AB與直線BD是否垂直？

(3) 求$\overline{DA}$的長。



解：

(1) 因為$\overline{AB}\perp\overline{BE}$且$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，

所以直線AB垂直平面BCE。

(2) 因為直線BD是平面BCE上一直線，

且直線AB垂直平面BCE，

所以直線AB與直線BD垂直。

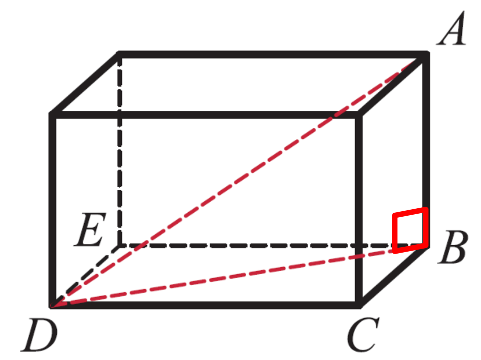
隨堂

右圖是一個長方體，且$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=6$。

(1) 試問直線AB與平面BCE是否垂直？

(2) 試問直線AB與直線BD是否垂直？

(3) 求$\overline{DA}$的長。



解：

(3) 因為$\overline{AB}\perp\overline{BD}$，所以$\angle ABD=90°$

利用畢氏定理，得

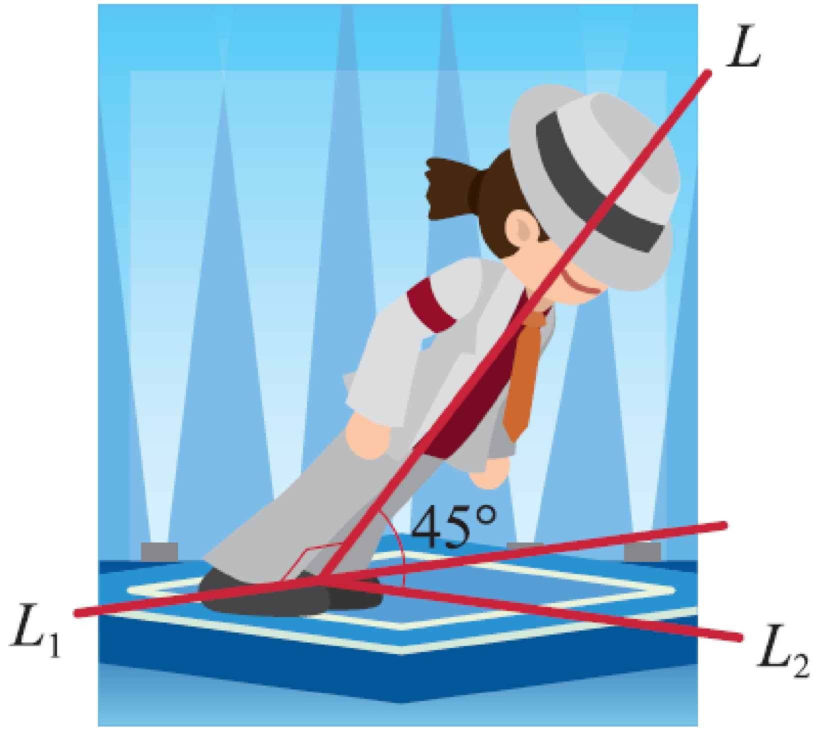
$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$$

$$\overline{DA}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{10})^2}=7$$

下圖中，舞者所在的直線L與地面上的直線 L_1垂直，但與另一條直線L_2不垂直。

因為L與L_2不垂直，所以由直線與平面的垂直定義得知 L與地面不垂直（舞者沒有直立在地面上）。

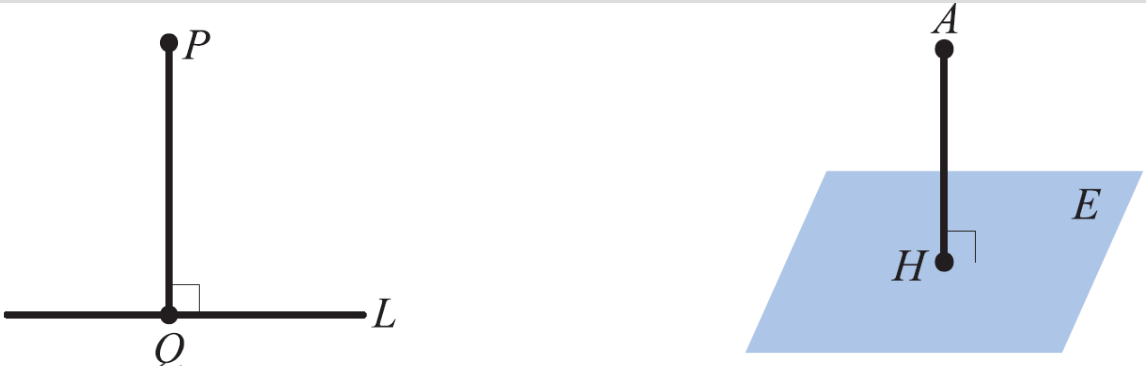
這例子告訴我們：
不能只憑平面上
有一條直線與L垂直
就判定直線L垂直該平面。



有了直線與平面垂直的定義與判定方法後
我們來定義投影點：

空間中，過P點作直線L的垂線交L於Q點
稱Q點為P點在**直線L上的投影點**，如圖(a) 所示。

過A點作平面E的垂線交E於H點
稱H點為A點在**平面E上的投影點**，如圖(b) 所示。



(a) (b)

正四面體（由四個正三角形所組成的立體圖形）是常見的立體圖形，應用直線與平面垂直的定義可以求它的高。

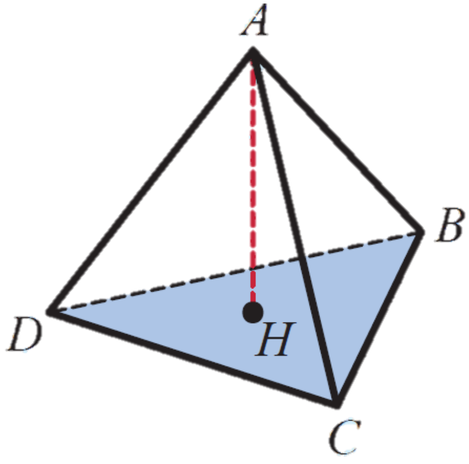
例題

3. 右圖是邊長為 6 的正四面體，H 為頂點 A 在底面 BCD 的投影點。

(1) 說明H為 $\triangle BCD$ 的外心。

(2) 說明H為 $\triangle BCD$ 的重心。

(3) 求正四面體的高$\overline{AH}$。

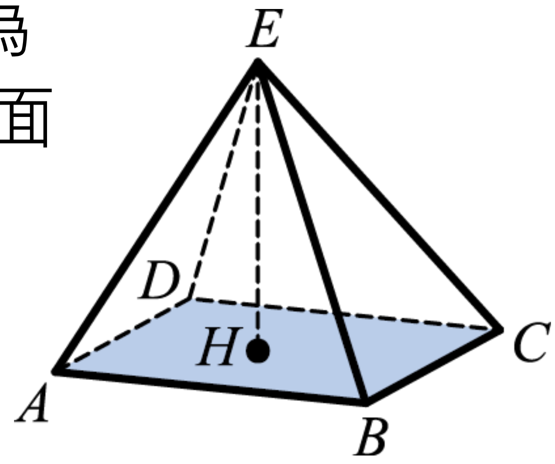


解：

例題

隨堂

右圖是底面為正方形，四個側面均為正三角形的四角錐，H為頂點E在底面$ABCD$的投影點。已知各邊長皆為2求四角錐的高$\overline{EH}$。



解：

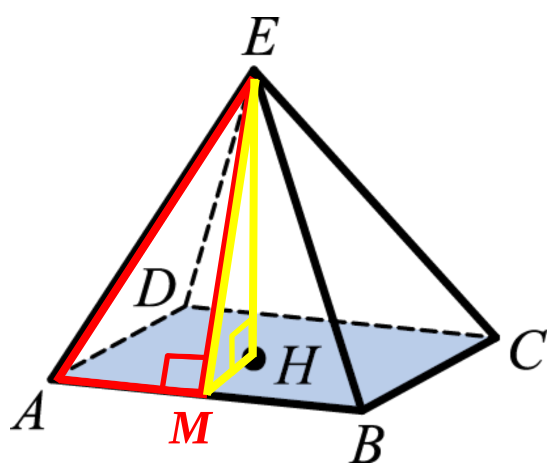
將AB中點 M 與 E 連接，因為$\triangle ABE$ 為正三角形

所以 $\overline{EM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

又 $\overline{HM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=1$

故 $\overline{EH}=\sqrt{\overline{EM}^2-\overline{HM}^2}$

$=\sqrt{\sqrt{3}^2-1^2}=\sqrt{2}$



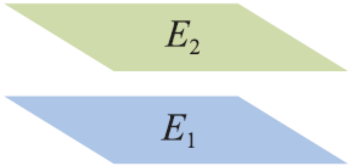
丁、平面與平面的關係

空間中兩個平面E_1與E_2的關係有以下三種:

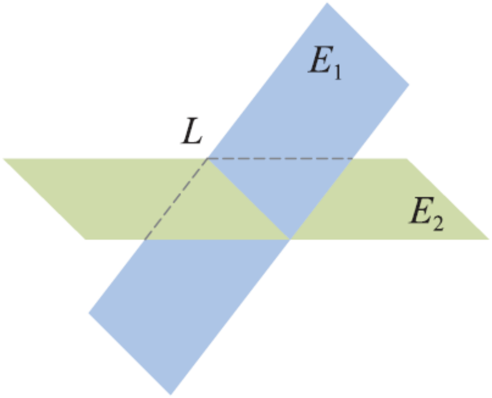
(1) 平面E_1與E_2不相交，此時稱E_1與E_2**平行**，記作$E_1//E_2$，如圖(a)。

(2) 平面E_1與E_2交於一直線L，此時稱L為E_1與E_2的**交線**，如圖(b)。

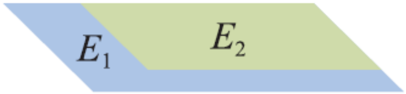
(3) 平面E_1與E_2重合，如圖(c)。



(a)



(b)



(c)

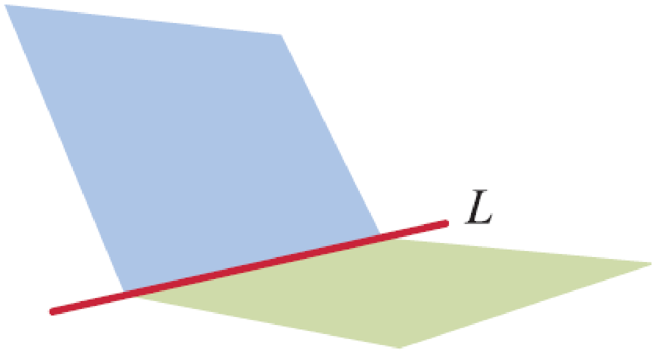
丁、平面與平面的關係

相交於一點的兩直線，可以討論它們的夾角，
相交於一直線的兩平面，也可以討論它們的夾角。
討論如下。

如圖(a)，一台打開的筆記型電腦，其螢幕與鍵盤構成一個夾角，這形狀就像我們接下來要介紹的「二面角」。

由共用邊界直線L的兩個半平面組成的圖形稱為**二面角**
如圖(b)所示，直線L稱為此二面角的**稜**，
兩個半平面稱為此二面角的兩**面**。

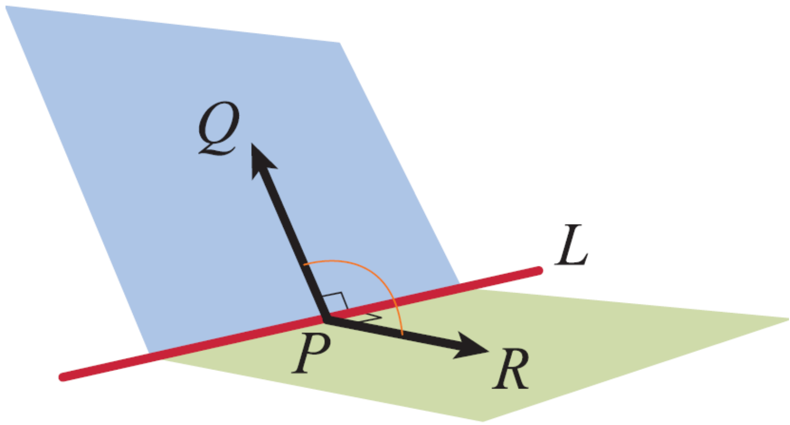
(a)



(b)

丁、平面與平面的關係

二面角的大小如何度量呢？
我們可以利用平面上的角來度量，作法如下：
在二面角的稜L上任取一點P，
並在二面角的兩面上分別作射線PQ與PR，
使它們都與直線L垂直，如圖所示。
此時$\angle QPR$的大小就是此二面角的大小。
此外，將P點沿著直線L移動時
$\angle QPR$的兩邊也隨著平行移動
其角度大小不變，
即此二面角的大小
與P 點的選取位置無關。

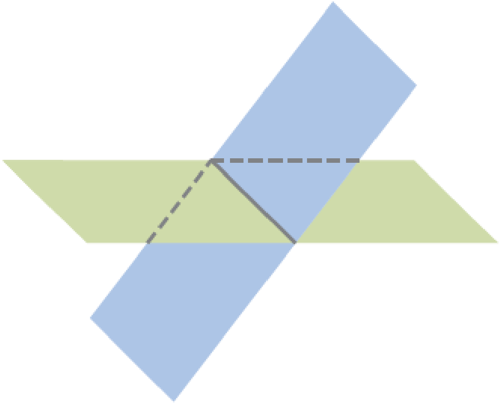


丁、平面與平面的關係

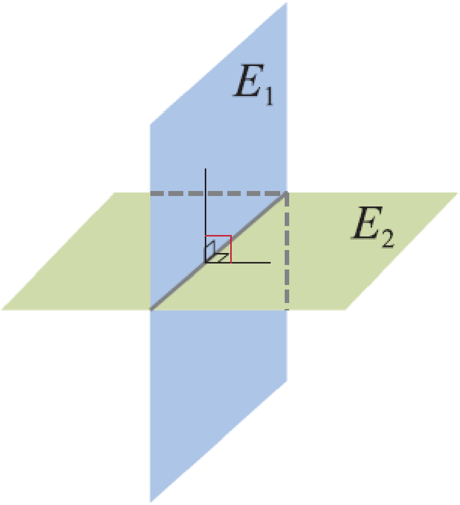
如果兩平面交於一直線，那麼它們會形成四個二面角，如圖(a)所示。

當平面E_1與E_2交出的四個二面角有一個是90° 時，另三個也都是90°，如圖(b)所示，此時稱平面E_1與E_2互相**垂直**，記作$E_1 \perp E_2$。

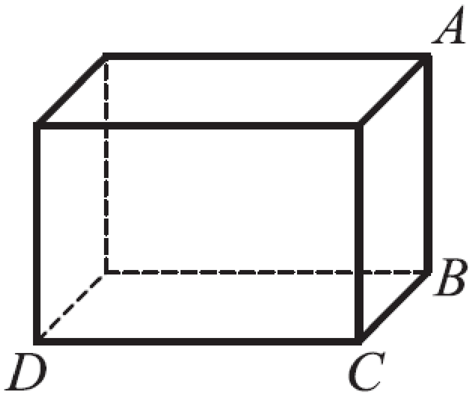
圖(c)的長方體中，平面ABC與平面BCD互相垂直。



(a)



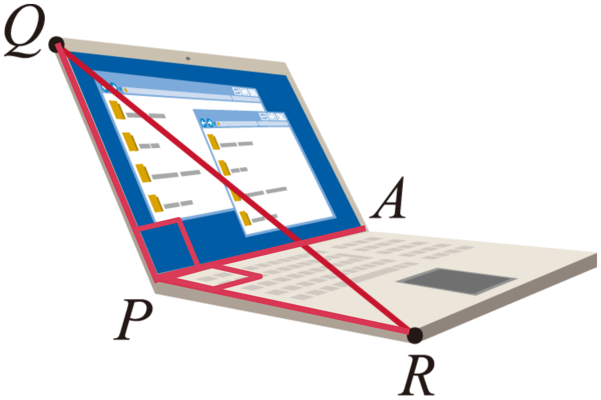
(b)



(c)

例題

4. 右圖是一台打開的筆記型電腦其螢幕與鍵盤的形狀都是矩形設 $\overline{PQ}=\overline{PR}=19$公分，$\overline{QR}=33$公分，且螢幕與鍵盤所形成的二面角為$\theta$。



(1) 說明$\angle QPR=\theta$

(2) 求θ的度數。（四捨五入到整數位）

解：

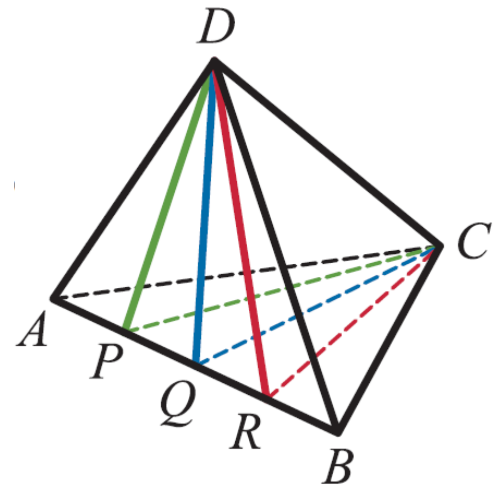
例題

隨堂

右圖為正四面體$ABCD$，且P,Q,R為$\overline{AB}$的四等分點。哪一個選項是底面ABC與側面ABD所形成二面角的大小？

(1) $\angle DAC$　(2) $\angle DPC$　(3) $\angle DQC$

(4) $\angle DRC$　(5) $\angle DBC$

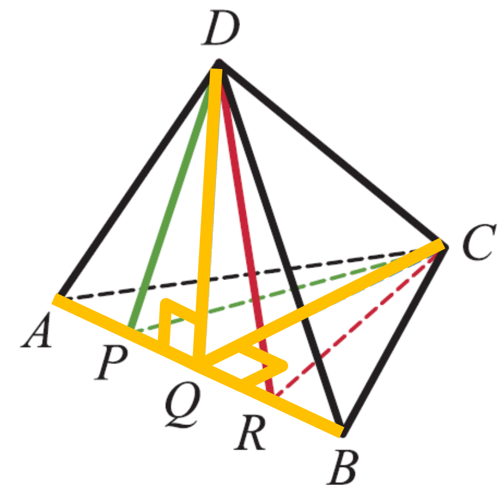


解：

底面與側面都是正三角形，且Q為$\overline{AB}$中點

因為$\overline{QD}\perp\overline{AB}$且$\overline{QC}\perp\overline{AB}$

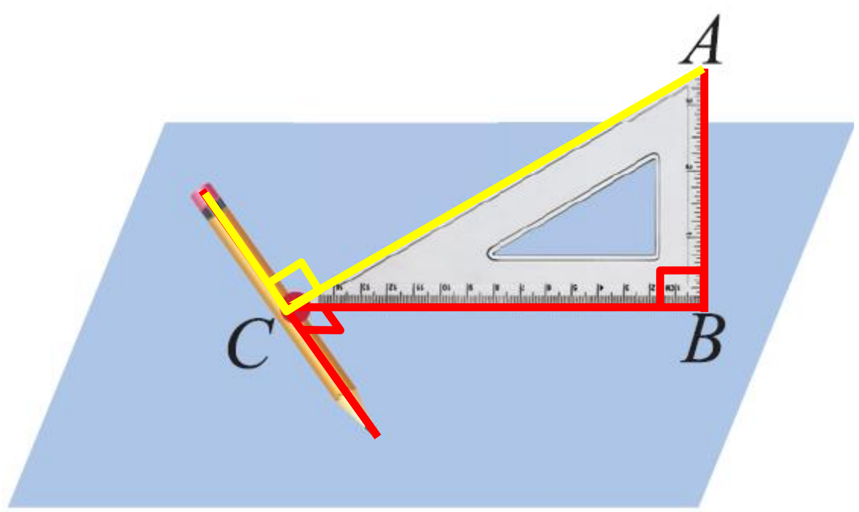
所以$\angle DQC$為底面與側面所形成的二面角，故選(3)



戊、三垂線定理

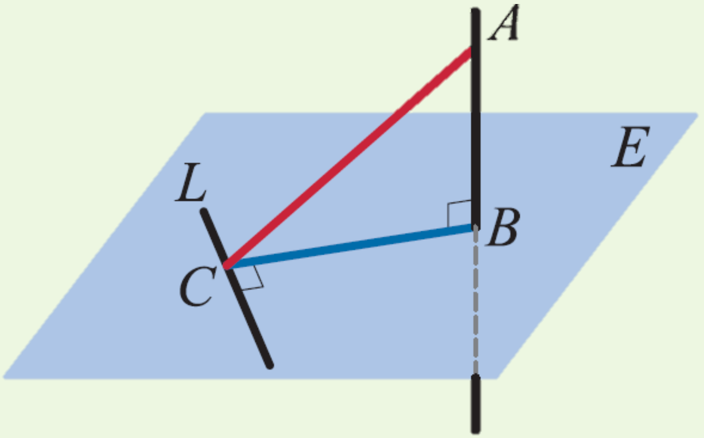
將直角三角板ABC立在桌面上，使$\overline{AB}$垂直桌面，$\overline{BC}$落在桌面上。再拿一支筆垂直$\overline{BC}$放在桌面上，如圖所示。

此時，你會發現斜邊$\overline{AC}$與筆也會垂直，這就是接下來要討論的三垂線定理。



三垂線定理

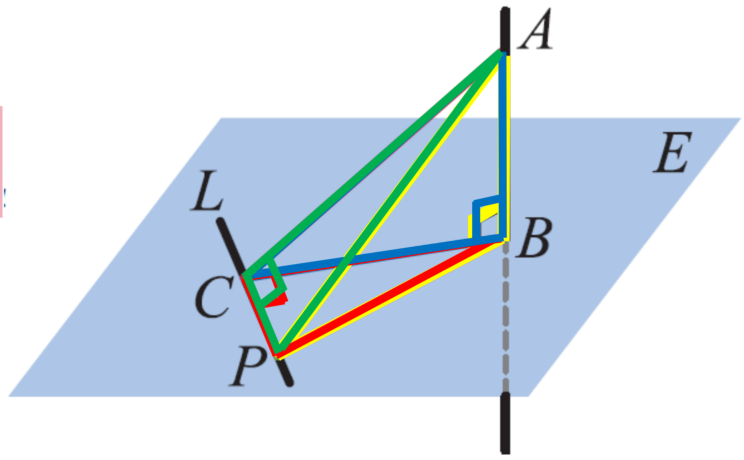
設直線AB垂直平面E於B點，
且L是平面E上一條直線。
若直線BC垂直L於C點，
則直線AC也垂直L於C點。



證明： 如圖，在L上取異於C的一點P，連$\overline{AP},\overline{BP}$。

因為$\angle ABC=\angle ABP=\angle BCP=90°$，所以利用畢氏定理，得

$$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{BP}^2$$
$$=\overline{AB}^2+(\overline{BC}^2+\overline{CP}^2)$$
$$=(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)+\overline{CP}^2$$
$$=\overline{AC}^2+\overline{CP}^2$$

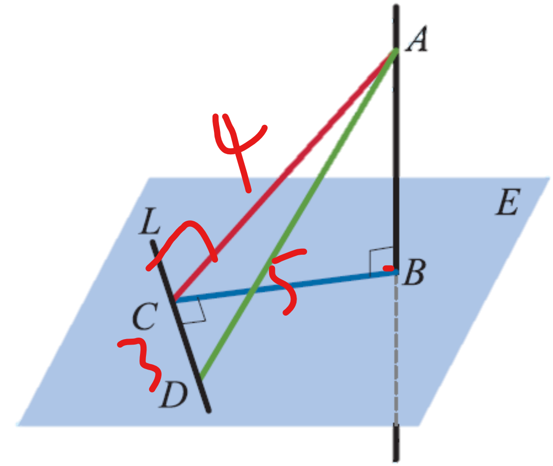


即$\triangle ACP$是一個直角三角形且$\angle ACP=90°$。

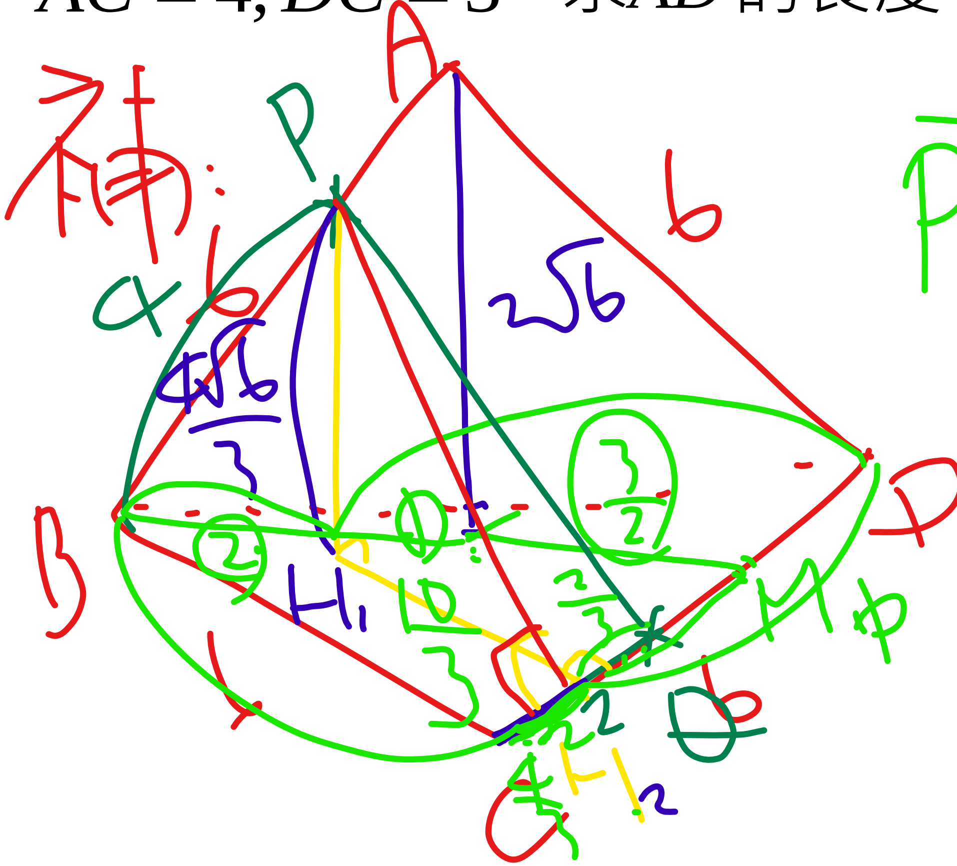
故直線AC垂直L於C點。

例題

5. 如右圖，直線AB垂直平面E於B點。L是平面E上一條直線，D是L上一點直線BC垂直L於C點。已知 $\overline{AC}=4, \overline{DC}=3$，求$\overline{AD}$的長度。



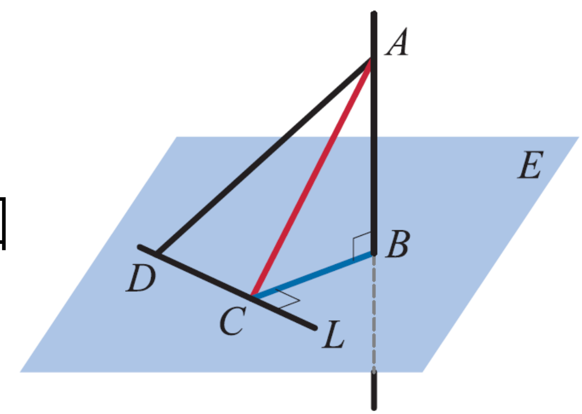
解：補：



$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PH_2}^2+\overline{QH_2}^2}$$
$$=\sqrt{\overline{PH_1}^2+\overline{H_1H_2}^2+\overline{QH_2}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{200}{9}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$$

隨堂

如右圖，直線AB垂直平面 E 於 B 點，L 是平面 E 上一條直線，D 是 L 上一點，直線BC 垂直 L 於 C 點。已知 $\overline{AD}=2,\overline{BC}=\overline{DC}=1$，求$\overline{AB}$的長度。



解：

由三垂線定理得知，直線 AC 垂直 L 於 C 點，

即$\triangle ACD$ 是一個直角三角形。利用畢氏定理，得

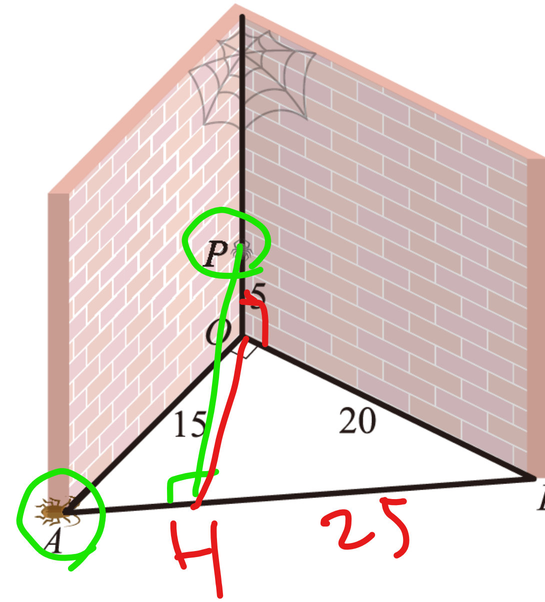
$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

又$\triangle ABC$ 是一個直角三角形，利用畢氏定理得

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$$

例題

6. 如右圖，兩牆面與地板均互相垂直在牆角有一隻蜘蛛停在 P 點，注視著從 A 點沿著直線爬到 B 點的蟑螂已知 $\overline{OP}=5, \overline{OA}=15, \overline{OB}=20$，求在整個注視的過程中，蜘蛛與蟑螂的最近距離。



解：

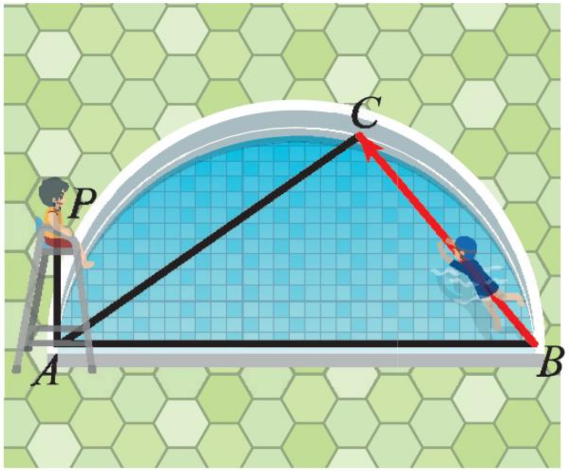
$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{5^2+12^2}$$

$$=13$$

例題

隨堂

右圖是半圓形的游泳池， 高腳椅直立在A點，救生員坐在高腳椅上注視著從B點沿著直線游到C點的泳客。已知游泳池的直徑$\overline{AB}=30$救生員離地$\overline{AP}=7$，泳客游泳的距離$\overline{BC}=18$，求



(1) $\overline{AC}$的長度

(2)在整個注視的過程中，救生員與泳客的最近距離

解：

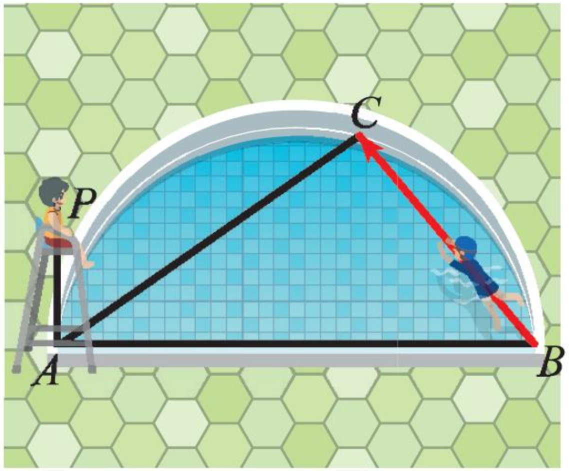
(1)因為$\overline{AB}$為直徑，所以$\angle ACB=90^{o}$

利用畢氏定理，得

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{30^2-18^2}=24$$

隨堂

右圖是半圓形的游泳池， 高腳椅直立在A點，救生員坐在高腳椅上注視著從B點沿著直線游到C點的泳客。已知游泳池的直徑$\overline{AB}=30$救生員離地$\overline{AP}=7$，泳客游泳的距離$\overline{BC}=18$，求



(1) $\overline{AC}$的長度

(2)在整個注視的過程中，救生員與泳客的最近距離

解：

(2)因為$\overline{PA}$垂直平面ABC，且$\overline{AC}\perp\overline{BC}$

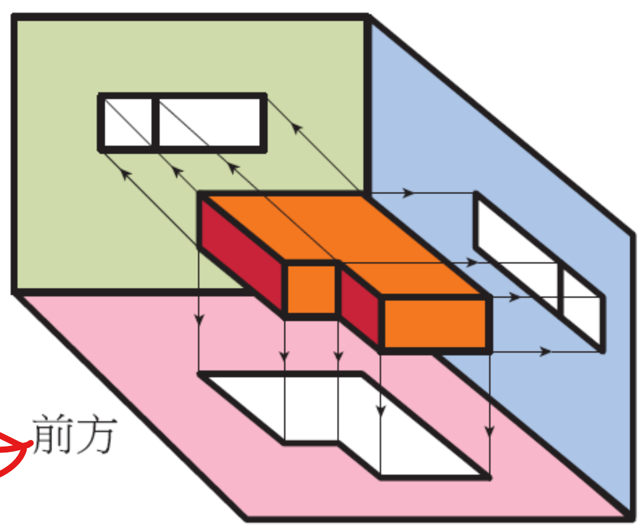
所以根據三垂線定理，得$\overline{PC}\perp\overline{BC}$

故最近距離為

$$\overline{PC}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{7^2+24^2}=25$$

最後，我們介紹在工程界廣被採用的**三視圖**。
三視圖不僅能夠增進我們的立體空間感，
也是3D列印技術的先備知識，介紹如下。

當我們觀察一個立體時，從前後左右各方向去看，
可能每一個方向看到的形狀都不一樣，
所謂「橫看成嶺側成峰」就是這個道理。



從某一方向觀察一個立體時，所看到的平面圖形，
稱為**視圖**。

從立體的前方由上往下俯視所見的視圖，
稱為**上視圖**。

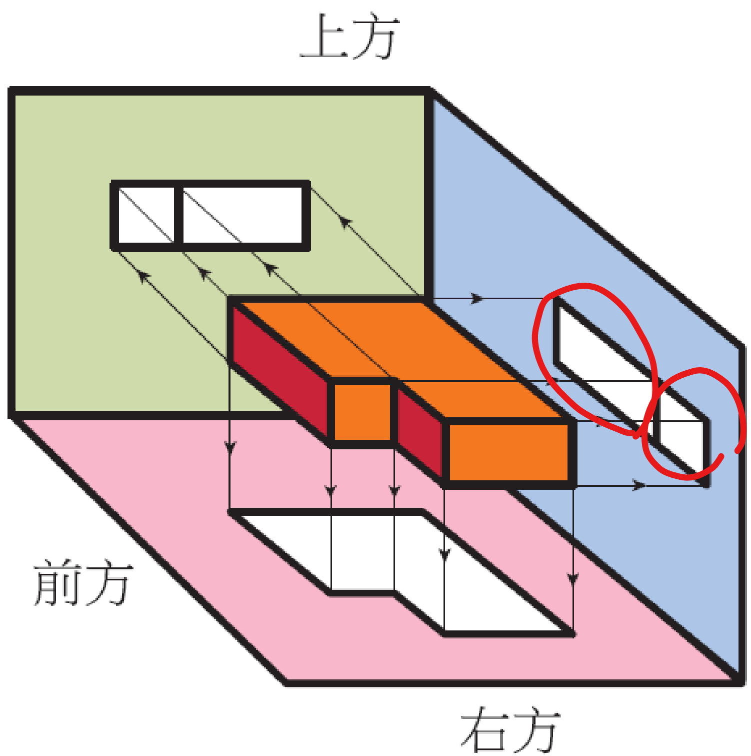
從前方、後方、左方、右方所見的視圖
分別稱為**前視圖**、**後視圖**、**左視圖**、**右視圖**。

若無特別需求，
描述一個立體通常只呈現前視圖、右視圖與上視圖，
便可知道此立體大概的樣貌。

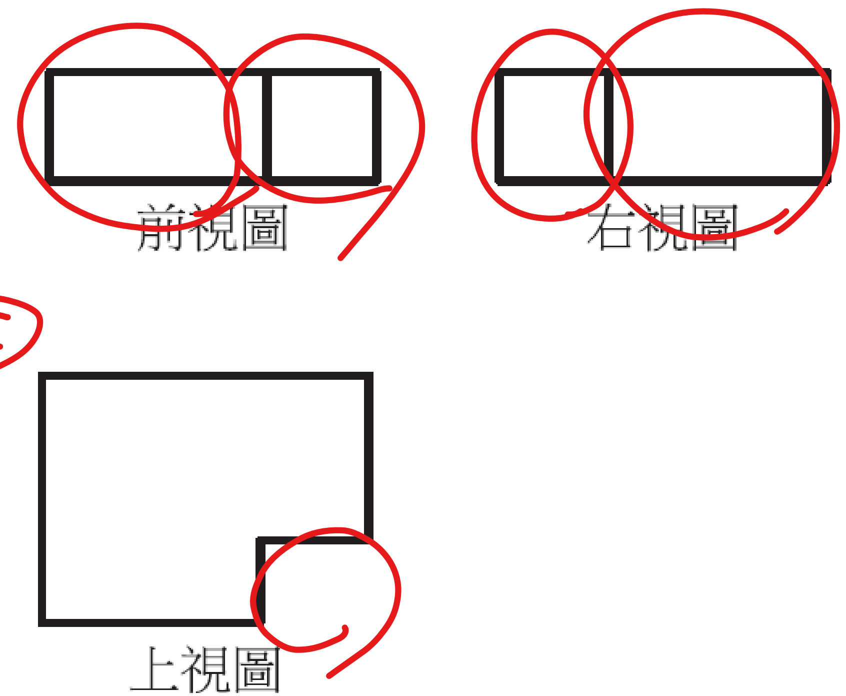
我們將前視圖、右視圖與上視圖統稱為**三視圖**。

來看幾個實例：

(1) 圖(a)是從三個方向看一個L形狀立體的示意圖，
圖(b)是此L形狀立體的三視圖。

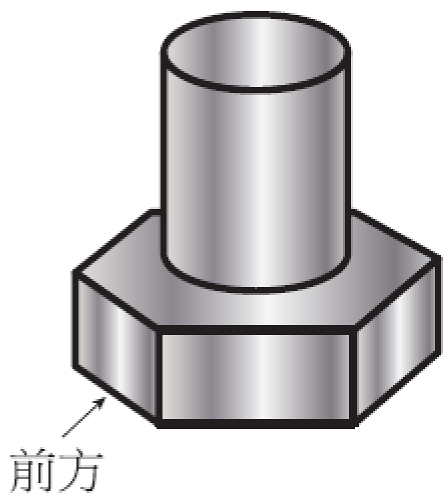


(a)三方向看立體圖形

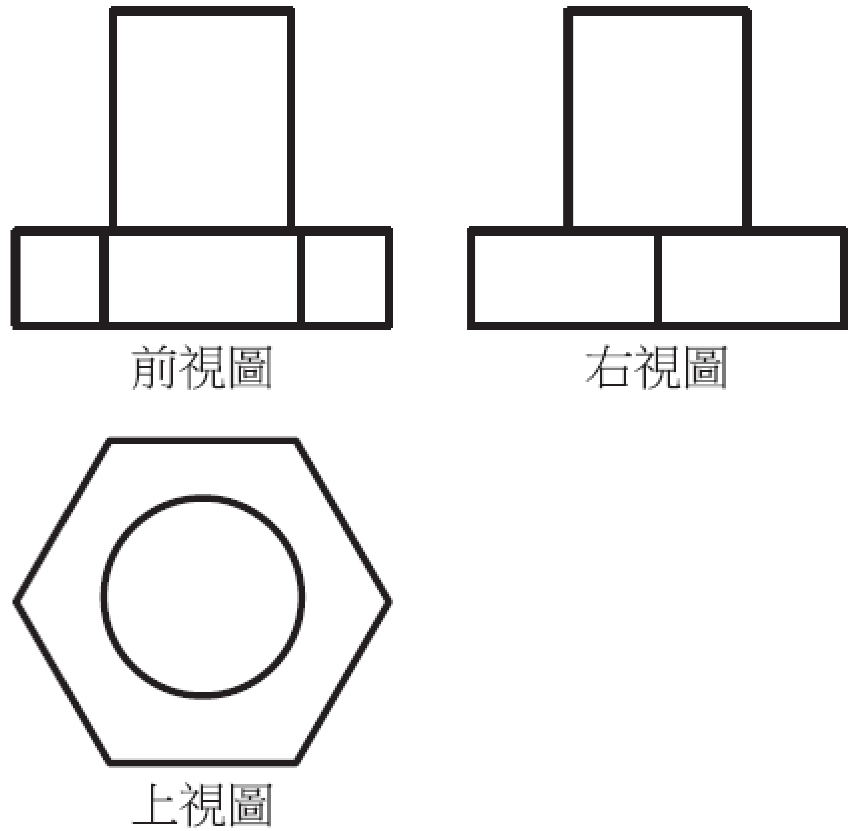


(b)三視圖

(2) 下圖是一個六角螺絲的半成品及其三視圖。

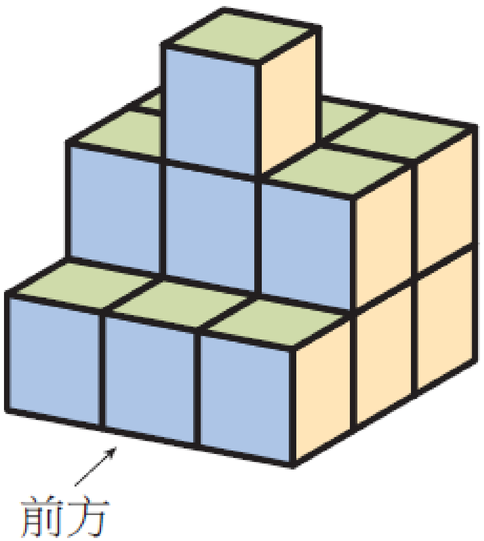


(a)六角螺絲的半成品

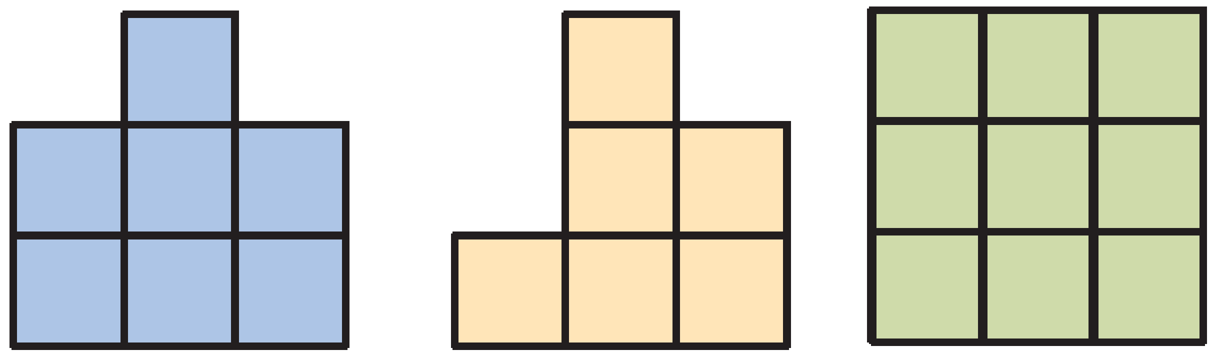


(b)三視圖

(3) 下圖是一個三用瓶口塞及其三視圖：



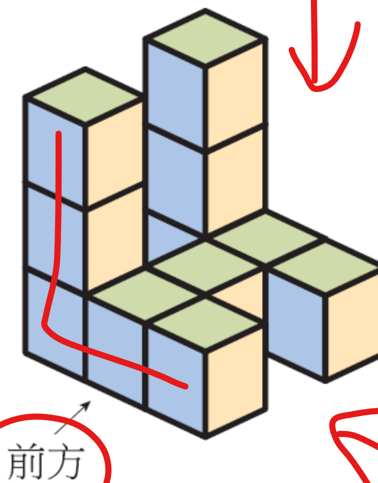
(a)三用瓶口塞


前視圖　右視圖　上視圖
(b)三視圖

根據三用瓶口塞的三視圖，知道它可以用來塞住下圖的三個創意糖果罐的瓶口。

下圖是此三個糖果罐的瓶口被軟木塞材質的三用瓶口塞塞住的情形。

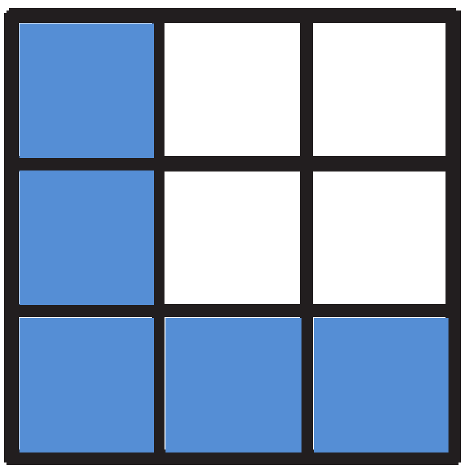
右圖是展場中的一個裝置藝術品。
請繪製它的三視圖。



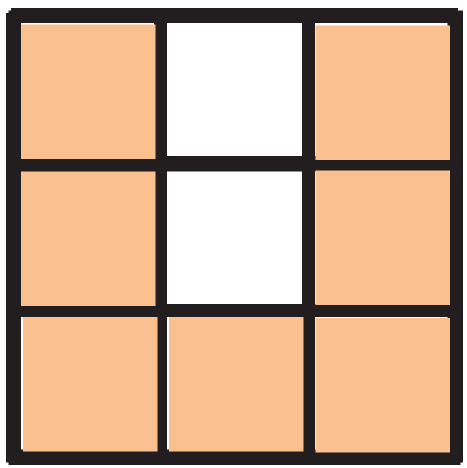
OK!

解：

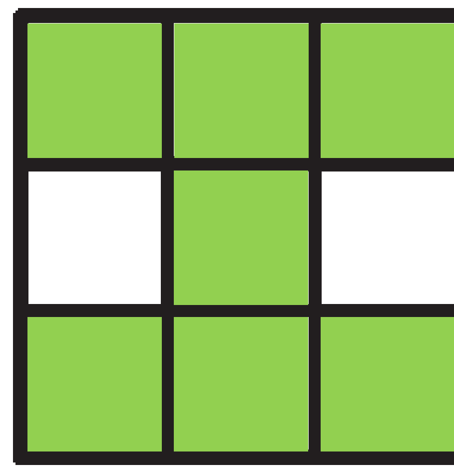
前視圖



右視圖

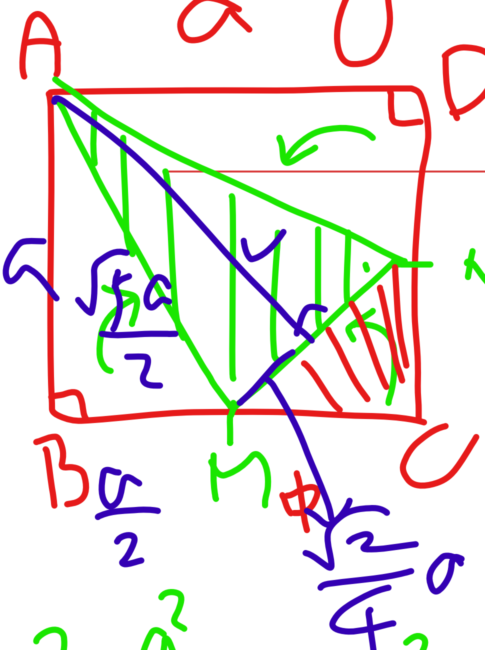


上視圖



Ending 1:

單元 1 結束



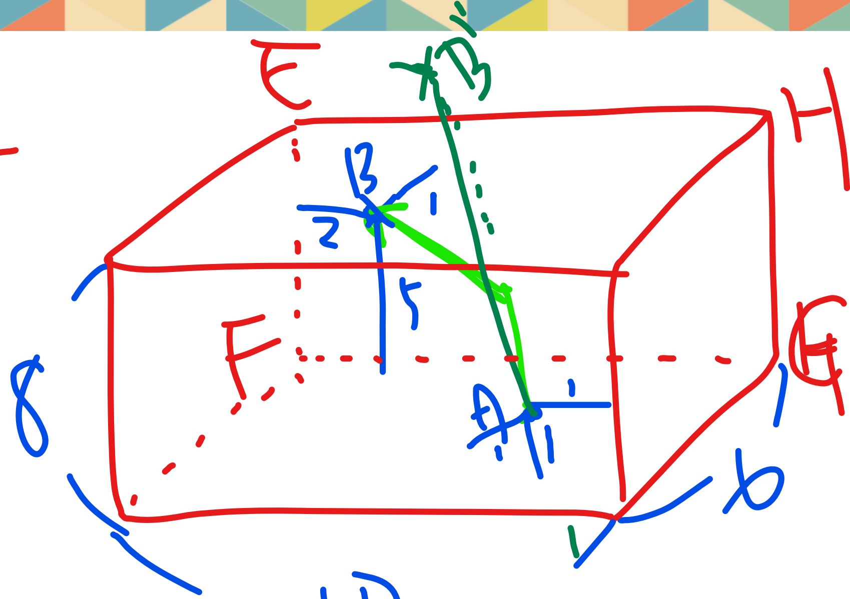
求 V_{OAMN}, 高

$$a^2 - \frac{a^2}{4}\times 2 - \frac{a^2}{8} = \frac{3}{8}a^2$$

$$V_{OAMN} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{a^3}{24}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}a^2 h \quad \therefore h = \frac{a}{3}$$

Ending 2



反射一次

⇓

對稱

所求路徑 $=\sqrt{6^2+7^2+4^2}$