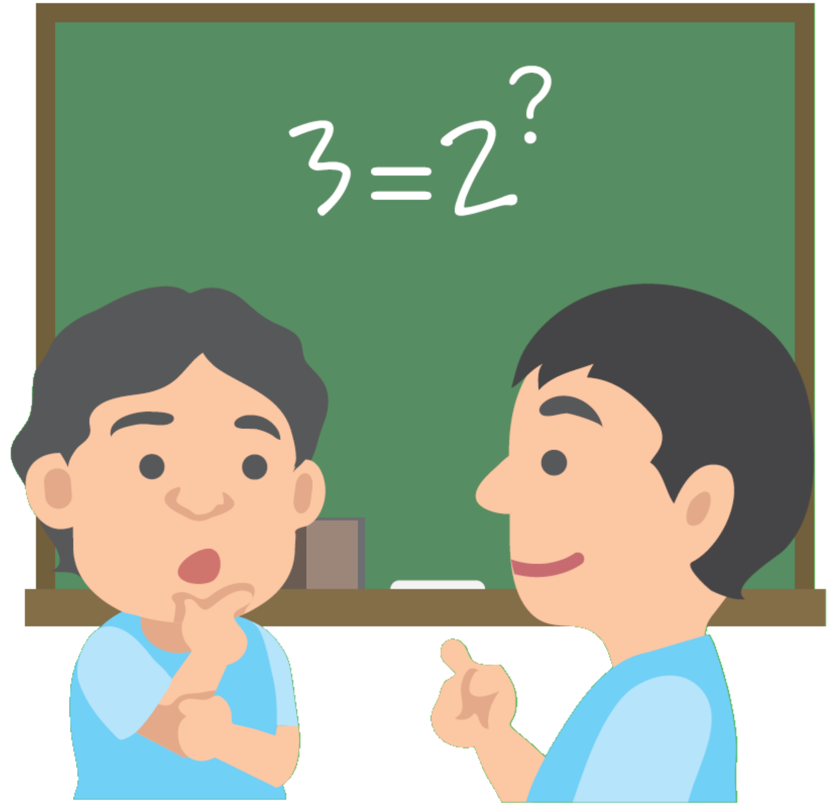
單元 6 對數與對數律

6 對數與對數律



在指數的運算中，

我們知道 $2^1=2$，$2^2=4$，

那麼2的幾次方會等於3呢？

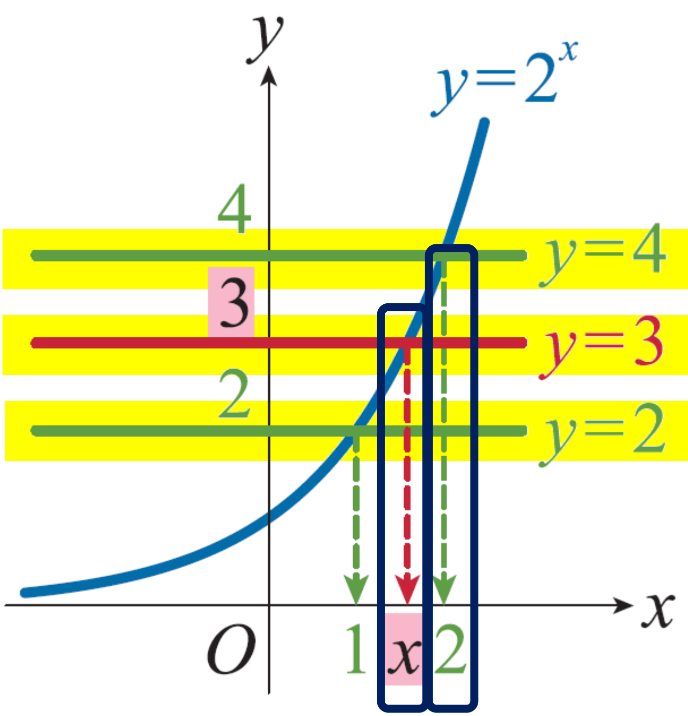
本單元中將定義一個與指數相對應的概念—「對數」，

並討論對數的各種運算性質。

甲、對數

解指數方程式$2^x=4$時，利用$2^2=4$，可以得到答案$x=2$。
但是對於方程式$2^x=3$，是不是有實數解呢？
若是，又該如何表示呢？

前一單元提到，指數函數$y=2^x$的圖形與水平線$y=4$的圖形有唯一交點，如圖所示，方程式$2^x=4$的解就是此交點的x坐標2。
而指數函數$y=2^x$的圖形與水平線的圖形也有唯一交點，因此可知：
方程式$2^x=3$也有唯一解，此實數解就是$y=2^x$與$y=3$圖形交點的x坐標，我們將這個x用符號$\boxed{\log_2 3}$來表示。



一般而言，當 $a>0$，$a \neq 1$ 時，指數函數 $y=a^x$ 的圖形與 x 軸上方的水平線 $y=b$（即 $b>0$）都有唯一交點，也就是說，方程式 $a^x=b$ 有唯一實數解；

我們將此實數解 x 以符號 $\log_a b$ 來表示。

對數的定義

設 $a>0$，$a \neq 1$，且 $b>0$ 時，

$$\log_{\underbrace{a}_{\text{底數}}} \overbrace{b}^{\text{真數}}$$

方程式 $a^x=b$ 有唯一實數解 $x=\log_a b$。

$\log_a b$ 稱為「以 a 為底數時 b 的對數」，

其中 a 稱為底數，b 稱為真數。

例題

1. 求下列各對數的值：

(1) $\log_2 8$　(2) $\log_3 \frac{1}{9}$　(3) $\log_4 1$　(4) $\log_5 5\sqrt{5}$

隨堂

求下列各對數的值：

(1) $\log_2 16$ **(2)** $\log_5 \frac{1}{5}$ **(3)** $\log_6 6$ **(4)** $\log_7 49\sqrt{7}$

解：

(1) 因為$16=2^4$，所以$\log_2 16=4$

(2) 因為$\frac{1}{5}=5^{-1}$，所以$\log_5 \frac{1}{5}=-1$

(3) 因為$6=6^1$，所以$\log_6 6=1$

(4) 因為$49\sqrt{7}=7^{\frac{5}{2}}$，所以$\log_7 49\sqrt{7}=\frac{5}{2}$

例題

2. 已知 $x = \log_2 3$，求 4^x 及 2^{-x} 的值。

隨堂

2. 已知 $x=\log_3 5$，求 3^x 及 3^{2x} 的值。

解： 因為 $x=\log_3 5$，所以 $3^x=5$。

且 $3^{2x}=\left(3^x\right)^2=5^2=25$

根據定義，因為 $\log_a b$ 是方程式 $a^x = b$ 的解，所以

$$a^{\log_a b} = b$$

例如：

$$3^{\log_3 5} = 5 \text{ ， } 10^{\log 7} = 7$$

因此，任何指數函數皆可改寫成以10為底數的指數函數，

例如：

$$y = 7^x = \left(10^{\log 7}\right)^x = 10^{(\log 7)x}$$

前一個單元介紹過常數 $e=2.71828\cdots$，當對數以 e 為底數（即 $\log_e b$）時，稱它為自然對數，常記作 $\ln b$。

自然對數 $\ln b$ 與常用對數 $\log b$ 是不同底數的兩種對數，其值也會有差異

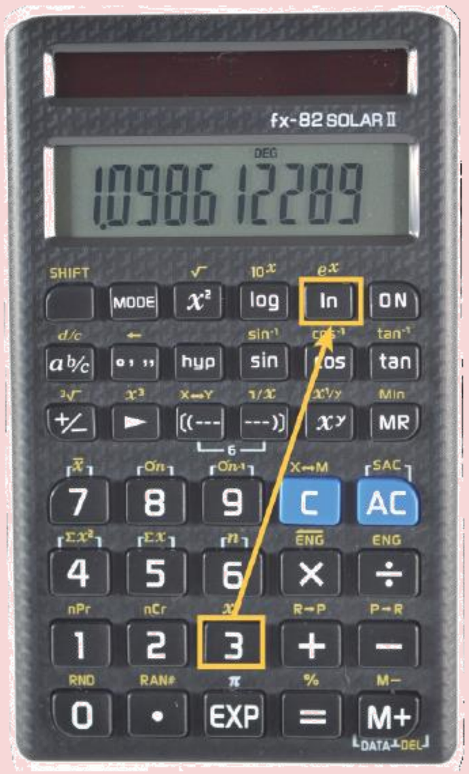
例如：

常用對數

$$\log 3=\log_{10} 3\approx 0.4771$$

自然對數

$$\ln 3=\log_e 3\approx 1.099$$



乙、常用對數的對數律與換底公式

納皮爾曾說過：「我終於發現某些優秀又簡短的規則，可以讓運算更有效益，並把困難繁瑣的乘除運算簡化成加減運算。」
納皮爾所說的規則，就是接下來要介紹的對數律。

約翰．納皮爾（John Napier,1550~1617）
對數的發明者，
使得科學界許多繁複的計算可以簡化。

常用對數的對數律

設 r，s 皆為正數，則

(1) $\log rs = \log r + \log s$

(2) $\log \dfrac{r}{s} = \log r - \log s$

(3) $\log r^t = t\log r$ (t 是實數)

例題

3. 求下列各式的值：

(1) $\log 4+\log 25$ 。

(2) $\log \frac{1}{6}-\log \frac{125}{42}-\log 56$ 。

隨堂

求下列各式的值：

(1) $\log 2+\log 0.2+\log 5+\log 0.5$ 。

(2) $\log 2-\log 20$ 。

解：(1) $\log 2+\log 0.2+\log 5+\log 0.5$

$$=\log(2\times 0.2\times 5\times 0.5)$$

$$=\log 1$$

$$=0$$

(2) $\log 2-\log 20=\log\left(2\div 20\right)=\log\frac{1}{10}=-1$

例題

4. 求 $3\log 2+\log 5-2\log 20$ 的值。

隨堂

求 $2\log\frac{5}{3}+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$ 的值。

解：

$$2\log\frac{5}{3}+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$$

$$=\log\left(\frac{5}{3}\right)^2+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$$

$$=\log\left(\frac{25\times27\times14}{9\times35\times3}\right)$$

$$=\log10$$

$$=1$$

換底公式

設 a,b 均為正整數，且 $a \neq 1$，則

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

一般而言，其他底數的對數都可換成常用對數後再來求值

例題

5. 求下列各式的值：

(1) $\log_4 5\times\log_5 4$。　　(2) $\log_8\sqrt{2}$。

隨堂

求下列各式的值：

(1) $\log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 9$　　(2) $\log_{25} \dfrac{1}{5}$

解：

(1) $\log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 9 = \dfrac{\log 5}{\log 3} \times \dfrac{\log 7}{\log 5} \times \dfrac{\log 9}{\log 7}$

$= \dfrac{\log 9}{\log 3} = \dfrac{2 \times \log 3}{\log 3} = 2$

(2) $\log_{25} \dfrac{1}{5} = \dfrac{\log \frac{1}{5}}{\log 25} = \dfrac{\log 5^{-1}}{\log 5^2} = \dfrac{(-1) \times \log 5}{2 \times \log 5} = \dfrac{-1}{2}$

例題

6. 求下列各式的值：

(1) $\dfrac{1}{\log_2 6}+\dfrac{1}{\log_3 6}$　　(2) $(\log_2 3)\times(\log_3 4+\log_9 2)$

隨堂

求下列各式的值：

(1) $\log_2 24 - \log_4 9$　　(2) $(\log_2 5) \times (\log_5 8 + \log_{25} 16)$

解：

(1) $\log_2 24 - \log_4 9 = \dfrac{\log 24}{\log 2} - \dfrac{\log 9}{\log 4}$

$$= \frac{\log 24}{\log 2} - \frac{2 \times \log 3}{2 \times \log 2}$$

$$= \frac{\log 24 - \log 3}{\log 2}$$

$$= \frac{\log 8}{\log 2} = 3$$

隨堂

求下列各式的值：

(1) $\log_2 24-\log_4 9$　　(2) $(\log_2 5)\times(\log_5 8+\log_{25} 16)$

解：

(2) $(\log_2 5)\times(\log_5 8+\log_{25} 16)=\left(\dfrac{\log 5}{\log 2}\right)\times\left(\dfrac{\log 8}{\log 5}+\dfrac{\log 16}{\log 25}\right)$

$$=\left(\frac{\log 5}{\log 2}\right)\times\left(\frac{3\times\log 2}{\log 5}+\frac{4\times\log 2}{2\times\log 5}\right)$$

$$=\left(\frac{\log 5}{\log 2}\right)\times\left(\frac{5\times\log 2}{\log 5}\right)=5$$

例題

7. 解方程式 $2^x=3$。（四捨五入到小數點以下第4位）

解：

根據對數的定義，方程式 $2^x=3$ 的解為 $\log_2 3$。

利用換底公式可得 $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}$，

使用計算機依序按下 3 log ÷ 2 log =

可得 $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}\approx 1.5850$。

隨堂

7. 解方程式 $3^x=7$。（四捨五入到小數點以下第4位）

解：

根據對數的定義，方程式 $3^x=7$ 的解為 $\log_3 7$。

利用換底公式可得 $\log_3 7=\dfrac{\log 7}{\log 3}$，

使用計算機依序按下 7 log ÷ 3 log =

可得 $\log_3 7=\dfrac{\log 7}{\log 3}\approx 1.7712$。

例題

8. 海嘯是一種有強大破壞力的海浪，其強度規模的等級 I 與該海嘯的平均海浪高度 H（公尺）有著以下的關係式：$I=\frac{1}{2}+\log_2 H$

問：海嘯等級4的平均海浪高度為等級3的幾倍?

隨堂

承例題，已知當海嘯等級2時，人會被海浪沖走，求此時的平均海浪高度（公尺）。
（四捨五入到小數點以下第二位）

關係式：$I=\frac{1}{2}+\log_2 H$

解：

由題意可知 $2=\frac{1}{2}+\log_2 H$

移項可得 $\frac{3}{2}=\log_2 H$

解得 $H=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}\approx 2.83$

故海嘯等級 2 時，平均海浪高度為 2.83 公尺。

丙、常用對數與科學記號

第一冊曾使用科學記號來判斷一個很大的數是幾位數，例如：

$$5.12\times10^{\boxed{5}}\text{ 是}\boxed{\text{6位數}}$$

接著，我們進一步來探討任意正數的乘冪，先看一個大於 1 的例子：利用計算機的 x^y 鍵可得

$$2^{50}\approx\boxed{1}.1\times10^{\boxed{15}}$$

由上式可知 2^{50} 是最高位數字為 1 的16位數。

此外，將一個介於 0 到 1 之間的數字表為科學記號，亦可知道它在小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字，例如：

$$0.00543 = \boxed{5}.543 \times 10^{\boxed{-3}}$$

從小數點後第 3 位開始出現不為 0 的數字，此數字為 $\boxed{5}$。

再來看一個例子：利用計算機的 x^y 鍵可得

$$0.3^{100} \approx \boxed{5}.2 \times 10^{\boxed{-53}}$$

由上式可知將 0.3^{100} 表示小數時，

從小數點後第53位開始出現不為 0 的數字，此數字為 $\boxed{5}$。

例題

9. 回答以下各小題：

(1) 2^{50}是幾位數？　　(2) $3^{200}\times 7^{1000}$是幾位數？

(3) 將0.5^{500}表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為0的數字？

隨堂

回答以下各小題：

(1) $4^{40}\times 3^{100}$ 是幾位數？最高位數字為何？

(2) 將 0.4^{100} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為0的數字？此不為0的數字為何？

解：

(1) 因為 $4^{40}\times 3^{100}=\left(10^{\log 4}\right)^{40}\times\left(10^{\log 3}\right)^{100}$

$$=10^{40\log 4+100\log 3}$$

$$\approx 10^{71.79}$$

$$=10^{0.79}\times 10^{71}$$

$$\approx \boxed{6}.1\times 10^{\boxed{71}}$$

所以 $4^{40}\times 3^{100}$ 是最高位數字為 6 的 72 位數。

隨堂

回答以下各小題：

(1) $4^{40}\times 3^{100}$ 是幾位數？最高位數字為何？

(2) 將 0.4^{100} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為0的數字？此不為0的數字為何？

解：

(2) 因為 $0.4^{100}=\left(10^{\log 0.4}\right)^{100}=10^{100(\log 2-\log 5)}$

$$\approx 10^{-39.79}$$

$$=10^{0.21}\times 10^{-40}$$

$$\approx \boxed{1}.6\times 10^{\boxed{-40}}$$

由上式可知將 0.4^{100} 表示小數時，

從小數點後第40位開始出現不為 0 的數字，此數字為 $\boxed{1}$。

日本發行了一本書《2017年最大質數》，

全書僅印了一個質數 $2^{77232917}-1$。

仿照例題9的方法可求得其位數為23249425，

如果一頁印約32350個數字的話，

就能在書本印製前估計其頁數為719頁。

相較於碳14的半衰期約為5700年，碳15的半衰期短得許多，僅有約2.4秒。那麼，1分鐘後，碳15的數量會衰變至約為原來數量的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ 倍，而20分鐘後，它的數量會衰變至約為原來數量的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{25\times 20}=0.5^{500}$ 倍，

也就是例題9中第(3)小題的這個數。

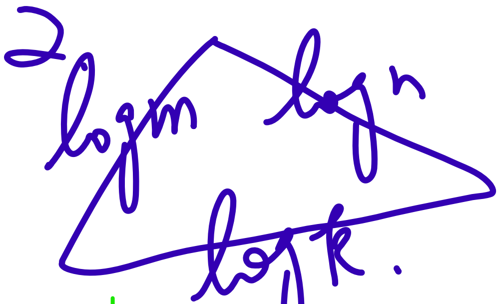
單元 6對數與對數律　本單元結束

$\Rightarrow x+y=0 \quad \log a+\log b=0 \Rightarrow \log ab=0 \quad \therefore ab=1$

矛盾 $\quad y+z=0 \quad \log b+\log c=0 \Rightarrow \log bc=0 \Rightarrow bc=1$

$\quad x+z=0 \quad \log a+\log c=0 \Rightarrow \log ac=0 \Rightarrow ac=1$

2.



$m, n, k \in \mathbb{N}$.
若存在100個k，使得 $\log m, \log n, \log k$ 可構成一個△，則 $m\times n$之最大值 134

So $\log m-\log n<\log k<\log m+\log n$ $(m>n)$

$\Rightarrow \frac{m}{n}<k<mn$ (33.5, 134)

$\Rightarrow mn-\frac{m}{n}<101$

$\Rightarrow mn\left(1-\frac{1}{n^2}\right)<101$ (大)(小)

$\Rightarrow mn\cdot\frac{3}{4}<101$

$\Rightarrow mn<\frac{404}{3}\doteqdot 134.6$

$\therefore mn$之最大 $=134$

取 $m=67, n=2$.

$k=34, 35, \ldots, 133$