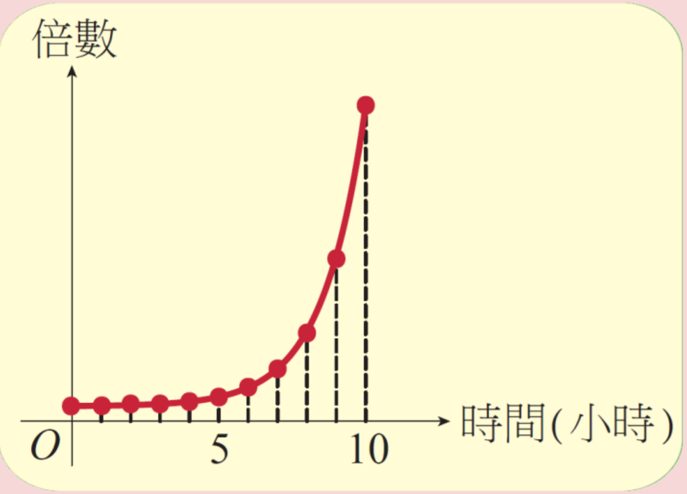
單元 5 指數函數

5 指數函數

實驗室中常進行細菌培養與研究，其中一個原因是因為其繁殖速度極快，在短時間內細菌的數量會以指數方式成長。

若某細菌每1小時會分裂1次，
其數量會變為原來的2倍；
經過2小時後，
其數量會變為原來的4倍...，
以此類推，可得「時間（小時）」
與其數量「倍數」的關係圖如圖所示。



本單元將探討形如圖這樣的函數關係及其圖形，並介紹它在生活上的應用。

甲、指數函數及其圖形

指數函數的定義

設 $a>0$，$a\neq 1$，且 x 是任意實數，函數

$$y=f(x)=a^x$$

稱為以 a 為底數的**指數函數**。

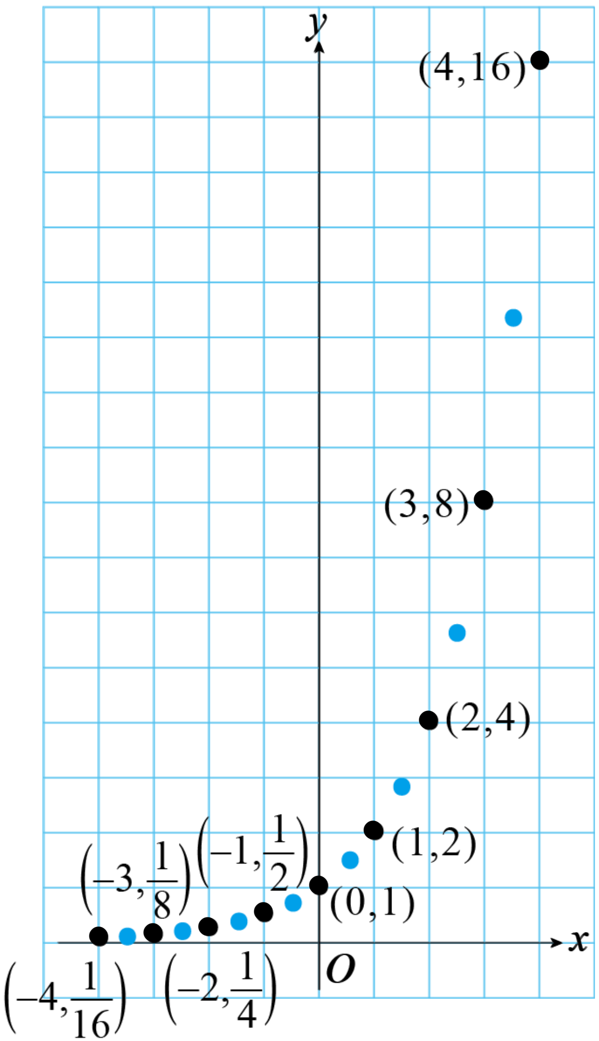
上面的定義中，特別要求 $a\neq 1$，原因是：

當 $a=1$ 時，$f(x)=1^x=1$

為常數函數，其圖形為一條水平直線。

例題

1. 描繪指數函數 $y=2^x$ 的圖形。



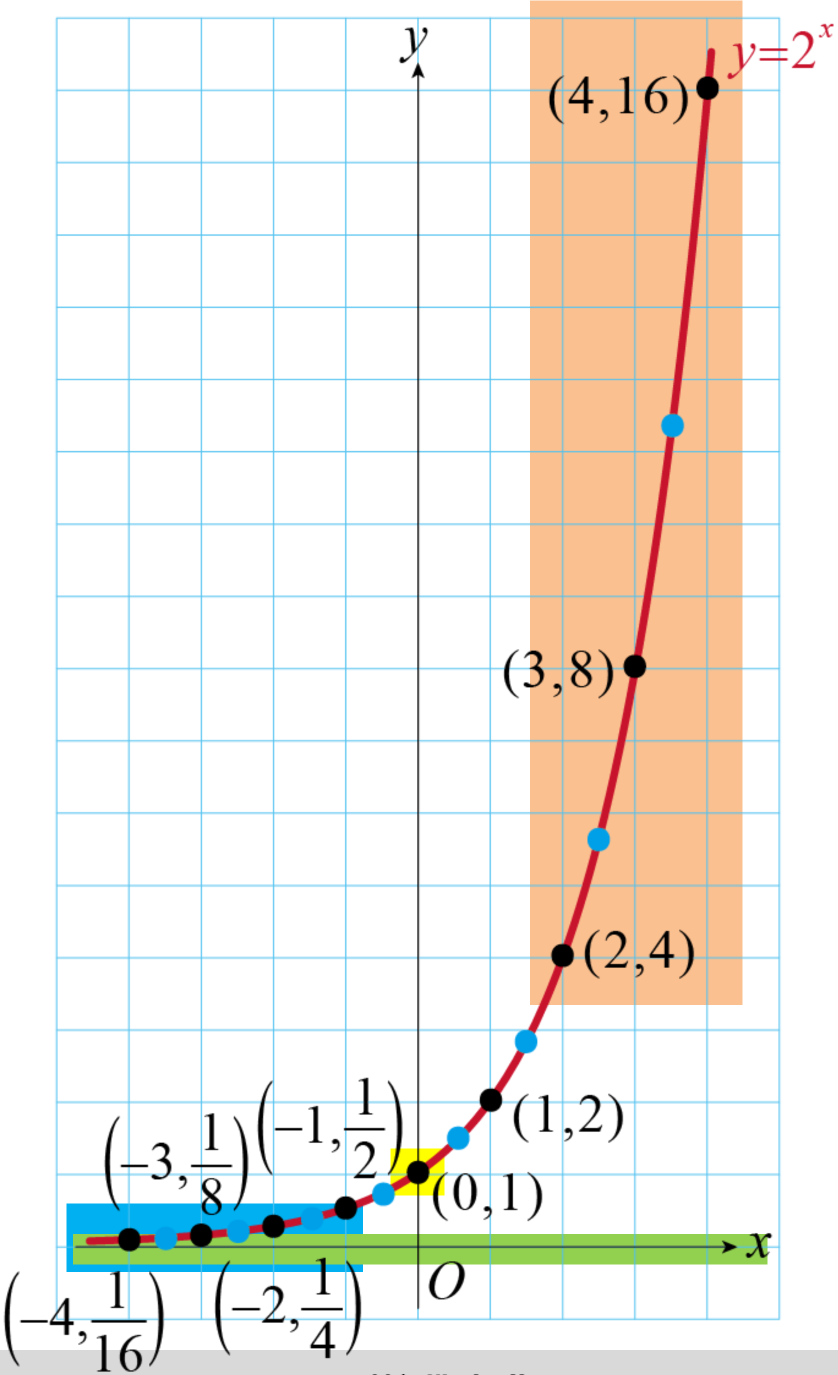
觀察 $y=2^x$ 的圖形發現：

其圖形通過點 $(0,1)$ ，

恆在 x 軸上方，

且愈往右邊上升愈快，

愈往左邊愈貼近 x 軸。



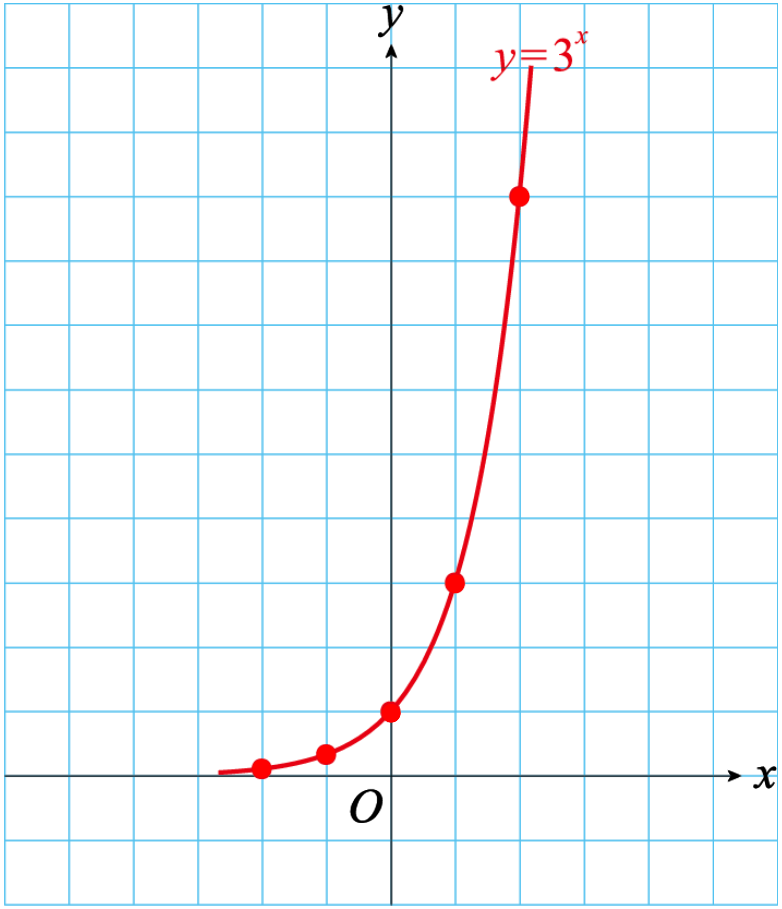
隨堂

描繪指數函數 $y=3^x$ 的圖形。

解： 先列出一些滿足 $y=3^x$ 的點 (x,y)

x	-2	-1	0	1	2
$y=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

將表列所對應的點逐一畫在坐標平面上（如右圖中的紅點）並用平滑曲線把這些點連接起來就可得到函數 $y=3^x$ 的圖形。



事實上，$y=3^x$ 的圖形同樣具有類似例題1中 $y=2^x$的圖形之特徵。

一般而言

當底數 $\boxed{a>1}$ 時，

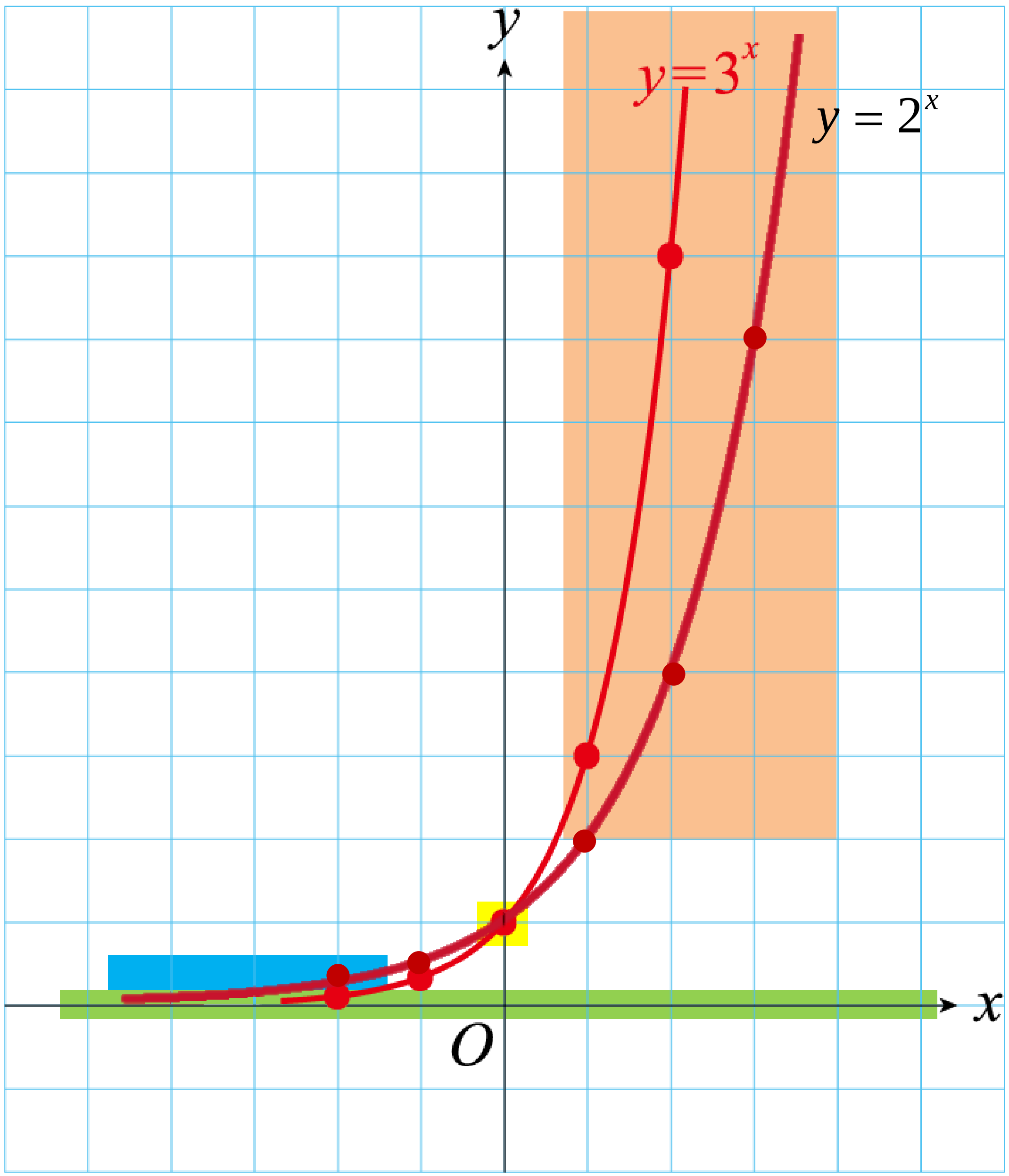
指數函數 $y=a^x$的圖形

都通過點 $(0,1)$ ，

恆在 x 軸上方，

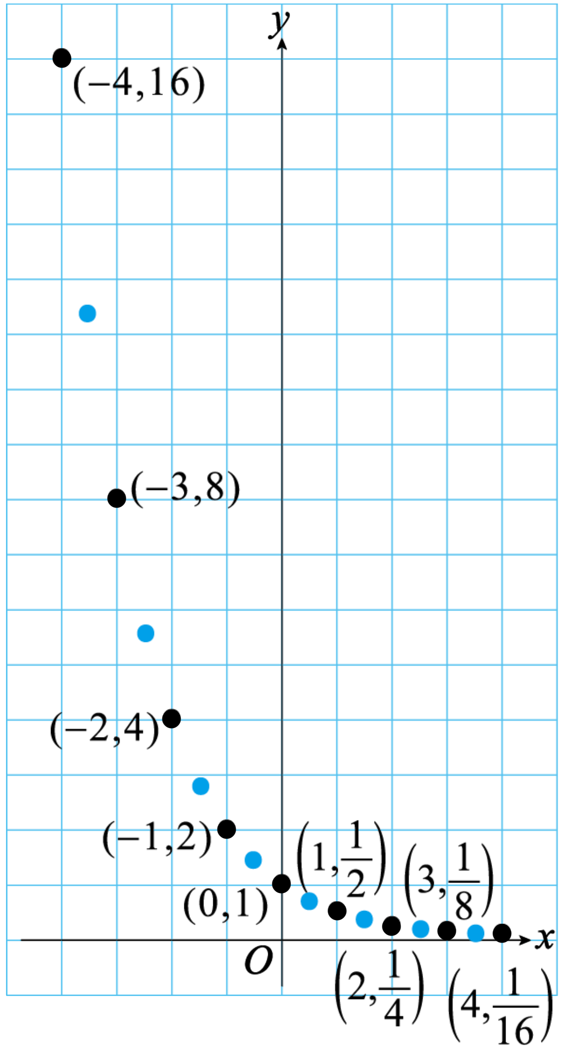
且愈往右邊上升愈快，

愈往左邊愈貼近 x 軸。



例題

2. 描繪指數函數 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形。



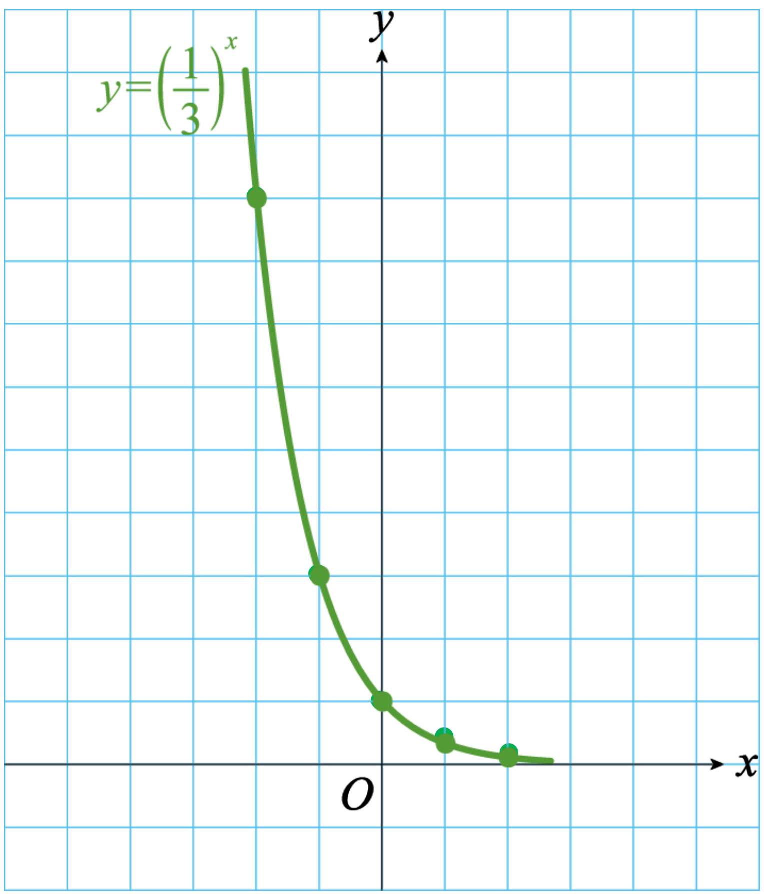
隨堂

描繪指數函數$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$的圖形。

解：先列出一些滿足$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$的點 (x,y)

x	-2	-1	0	1	2
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

將表列所對應的點逐一畫在坐標平面上（如右圖中的綠點）並用平滑曲線把這些點連接起來就可得到函數$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$的圖形

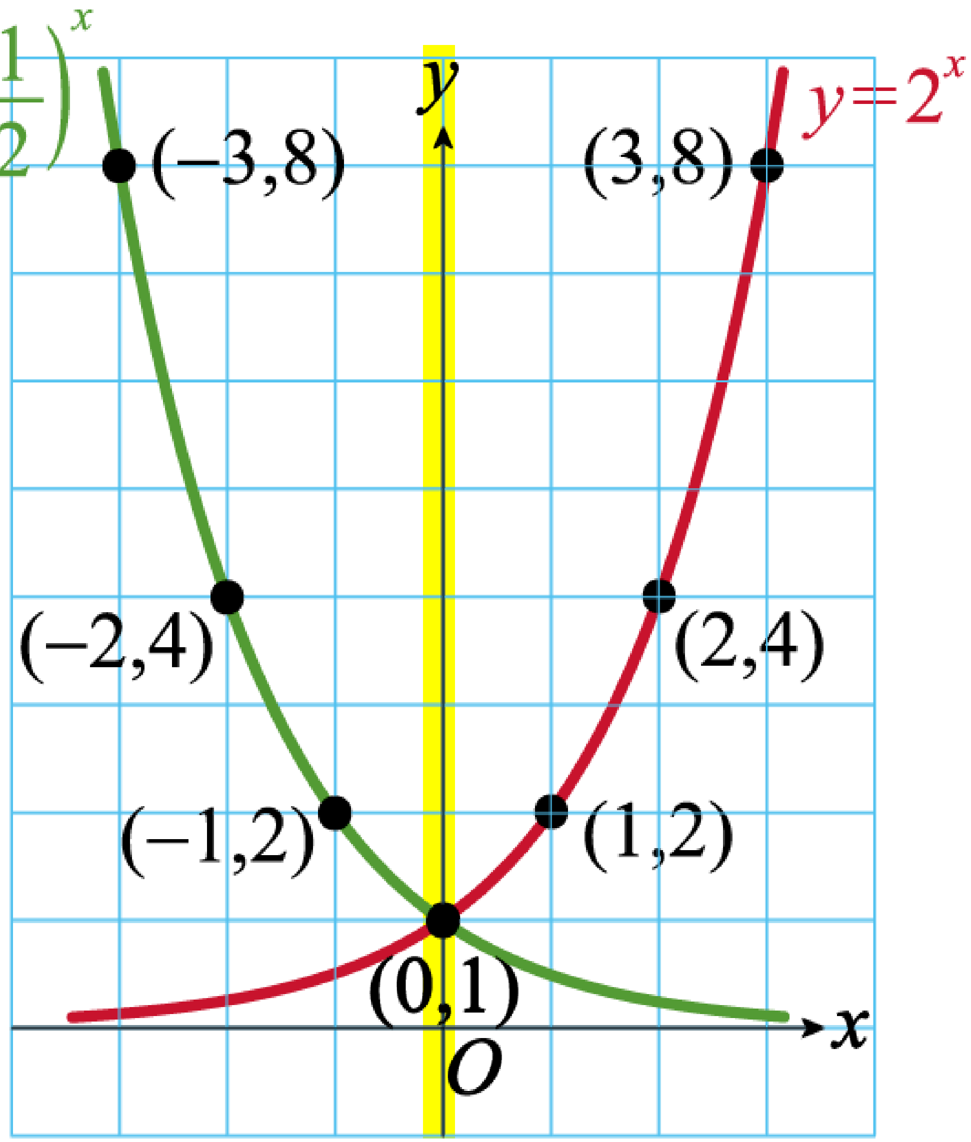


再將 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形

放在同一坐標平面上，

如圖所示；

觀察發現兩圖形對稱於 y 軸



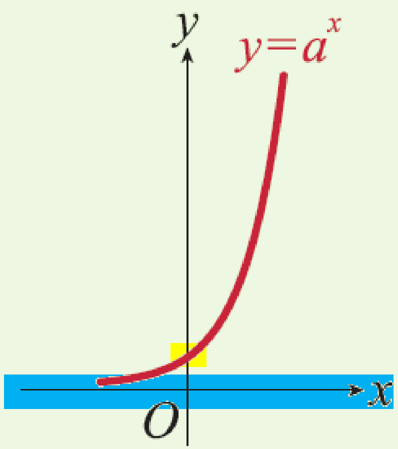
一般而言，

指數函數 $y=a^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

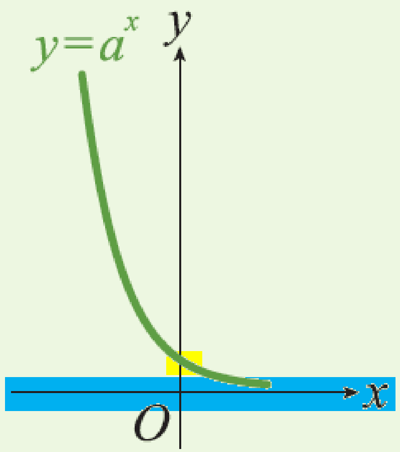
的圖形對稱於 y 軸

指數函數的圖形

設 $a>0$，$a\neq 1$，指數函數 $y=a^x$ 的圖形如下：



$a>1$



$0<a<1$

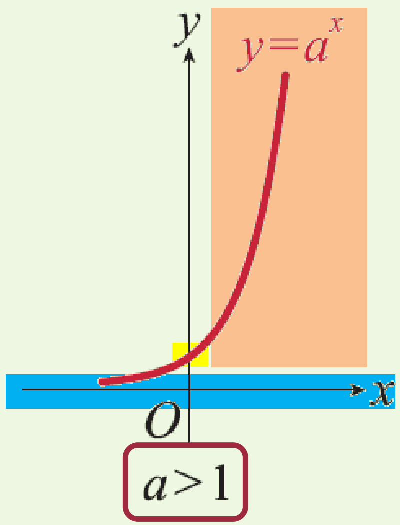
指數函數 $y=a^x$ 的圖形有以下的特徵：

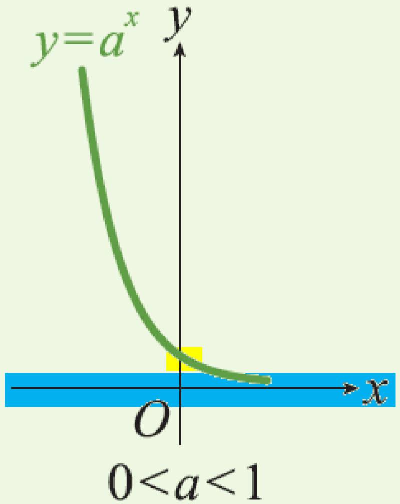
(1) 因為 $a^0=1$，所以圖形會過點 $(0,1)$。

(2) 圖形都在 x 軸上方。

指數函數的圖形

設 $a>0$，$a \neq 1$，指數函數 $y=a^x$ 的圖形如下：





指數函數 $y=a^x$ 的圖形有以下的特徵：

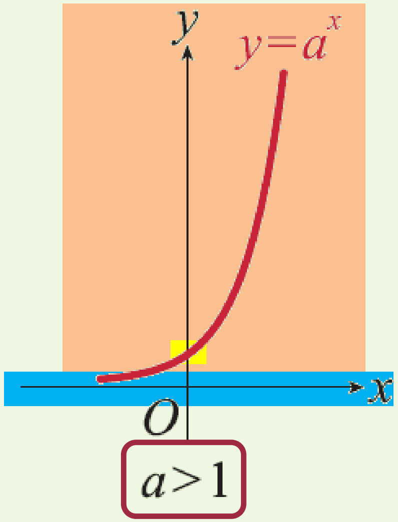
(3) ① 當 $a>1$ 時，圖形由左往右逐漸上升，

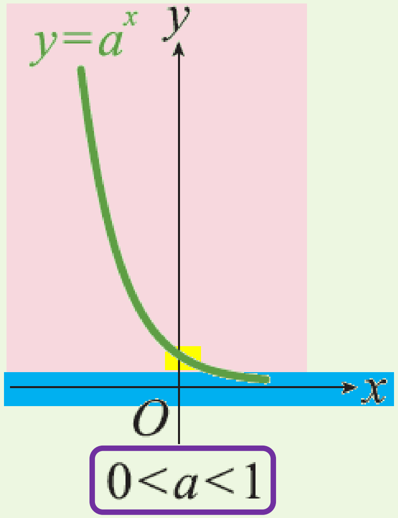
即 x 愈大，y 愈大 (也就是說，若 $\alpha>\beta$，則 $a^{\alpha}>a^{\beta}$)

並稱這樣的函數為嚴格遞增函數。

指數函數的圖形

設 $a>0$，$a\neq 1$，指數函數 $y=a^x$ 的圖形如下：





指數函數 $y=a^x$ 的圖形有以下的特徵：

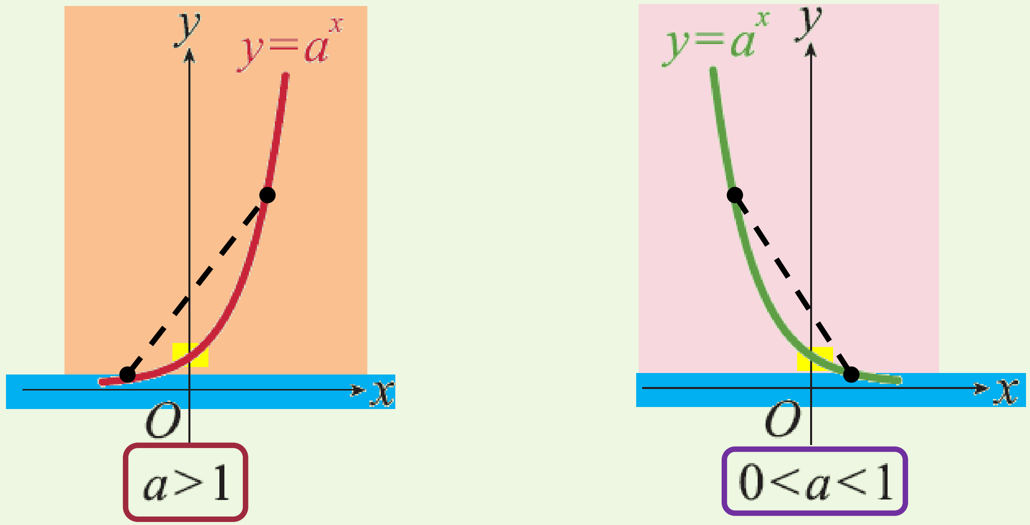
(3) ② 當 $0<a<1$ 時，圖形由左往右逐漸下降，

即 x 愈大，y 愈小 (也就是說，若 $\alpha>\beta$，則 $a^{\alpha}<a^{\beta}$)

並稱這樣的函數為嚴格遞減函數。

指數函數的圖形

設 $a>0$，$a\neq 1$，指數函數 $y=a^x$ 的圖形如下：



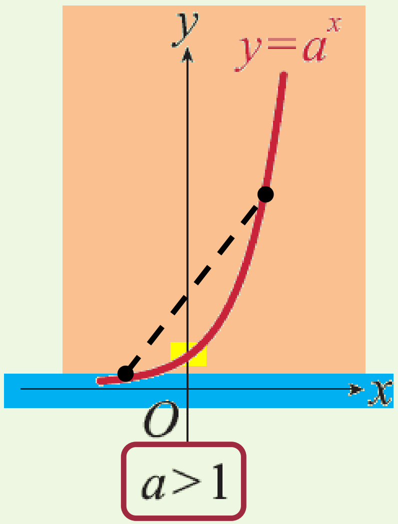
指數函數 $y=a^x$ 的圖形有以下的特徵：

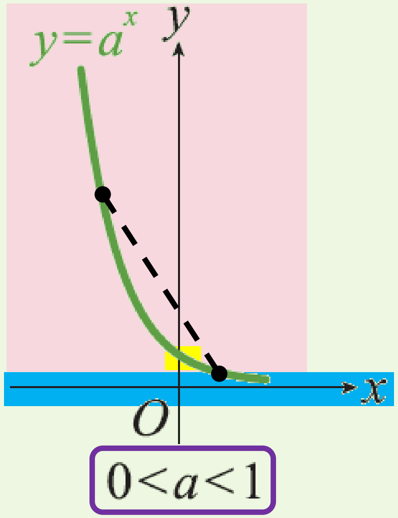
(4) 函數 $y=a^x$ 和 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸。

(5) 圖形上任相異兩點所連成的線段都在函數圖形的上方，稱函數圖形的凹口向上，如圖所示。

指數函數的圖形

設 $a>0$，$a\neq 1$，指數函數 $y=a^x$ 的圖形如下：





由圖觀察發現：

指數函數 $y=a^x$ 的定義域為 $\boxed{\text{全體實數 }\mathbb{R}}$，

且值域為所有 $\boxed{\text{正實數}}$。

隨堂

已知函數 $f(x)$ 的圖形與 $g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸，求 $f(x)$ 。

解：

因為函數 $y=a^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸。

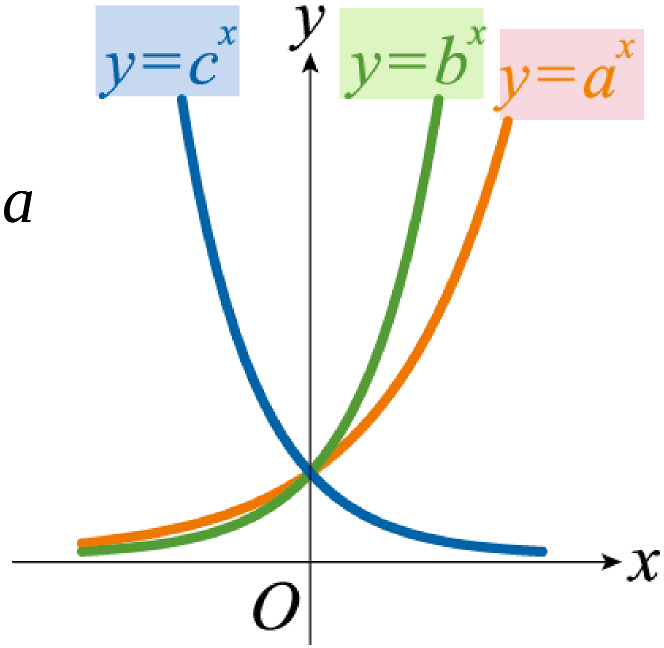
所以 $f(x)=5^x$ 。

例題

3. 指數函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$ 的圖形如右所示

選出所有正確的選項

(1) $a>1$ **(2)** $b>1$ **(3)** $c>1$ **(4)** $b>a$



隨堂

指數函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$ 的圖形如圖所示其中 $y=a^x$ 與 $y=c^x$ 的圖形對稱於 y 軸選出所有正確的選項

(1) $a>1$ **(2)** $\overline{OP}=1$ **(3)** $ac=1$ **(4)** $c>b$

解： 由圖形可知：

(1) 因為 $y=a^x$ 為嚴格遞增函數

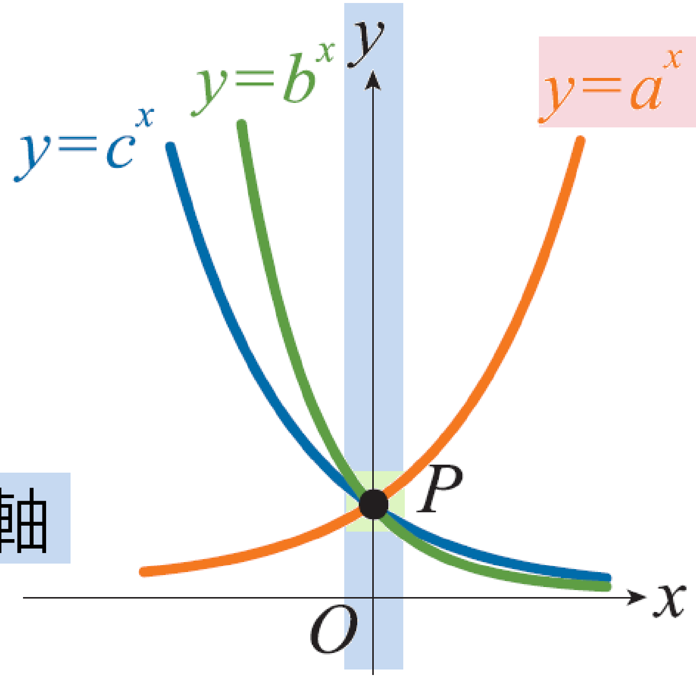
所以 $a>1$

(2) 因為 P 點坐標為 $(0,1)$

所以 $\overline{OP}=1$

(3) 因為 $y=a^x$ 與 $y=c^x$ 對稱於 y 軸

所以 $c=\dfrac{1}{a}\Rightarrow ac=1$



隨堂

指數函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$ 的圖形如圖所示，其中$y=a^x$ 與$y=c^x$的圖形對稱於 y 軸。選出所有正確的選項。

(1) $a>1$ **(2)**$\overline{OP}=1$ **(3)**$ac=1$ **(4)**$c>b$ 。

解：(4) 作直線 $x=1$

分別與 $y=a^x$ 和 $y=c^x$

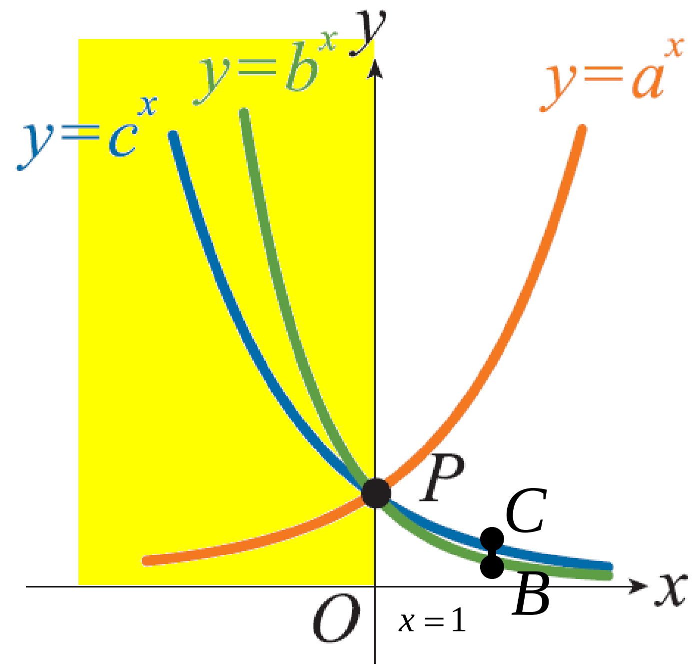
交於 $B(1,b),C(1,c)$ 兩點

如圖所示

因為 C 點在 B 點的上方

所以 $c>b$

故選(1)(2)(3)(4)。



乙、指數函數的應用

引言提到細菌的數量會以指數的方式成長，
常見的研究對象為大腸桿菌，
它每過30分鐘，其數量會變為原來的2倍；
經過60分鐘後（**2個30分鐘**），其數量會變為原來的4倍。

一般而言，經過 x 分鐘後（$\frac{x}{30}$ 個30分鐘），其數量會變為原來的 $2^{\frac{x}{30}}$ 倍假設經過一段時間後，發現細菌數量變為原來的1024倍，那麼是經過了多少分鐘呢？

也就是說，指數方程式 $2^{\frac{x}{30}}=1024$ 的解為何呢？

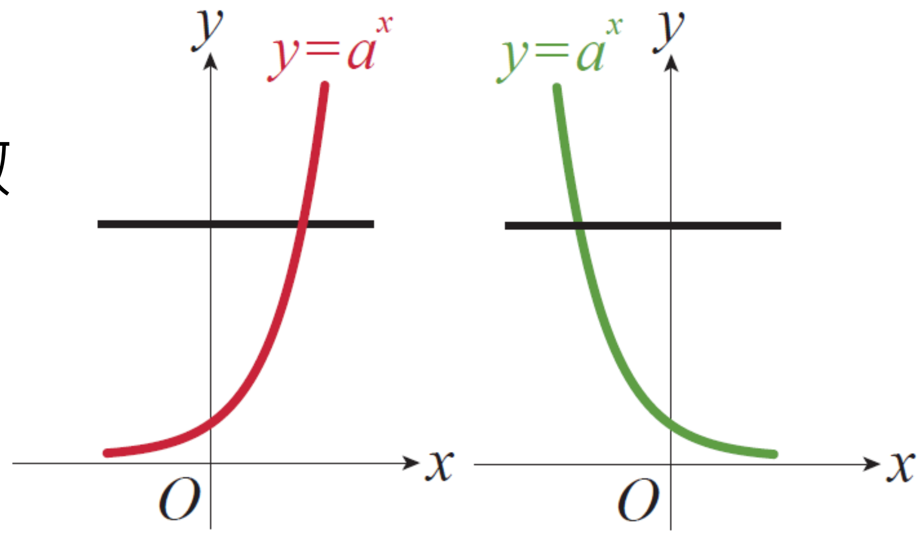
解指數方程式的過程，經常會用到第一冊學過的指數律：

設 a,b 為正實數， r,s 是任意實數，則

(1) $a^r \cdot a^s =$　　(2) $\left(a^r\right)^s =$　　(3) $a^r \cdot b^r =$

再者，因為指數函數為嚴格遞增函數或嚴格遞減函數其圖形與 x 軸上方的水平線僅有唯一的交點，也就是說

若 $a^{\alpha} = a^{\beta}$ ，則 $\alpha = \beta$

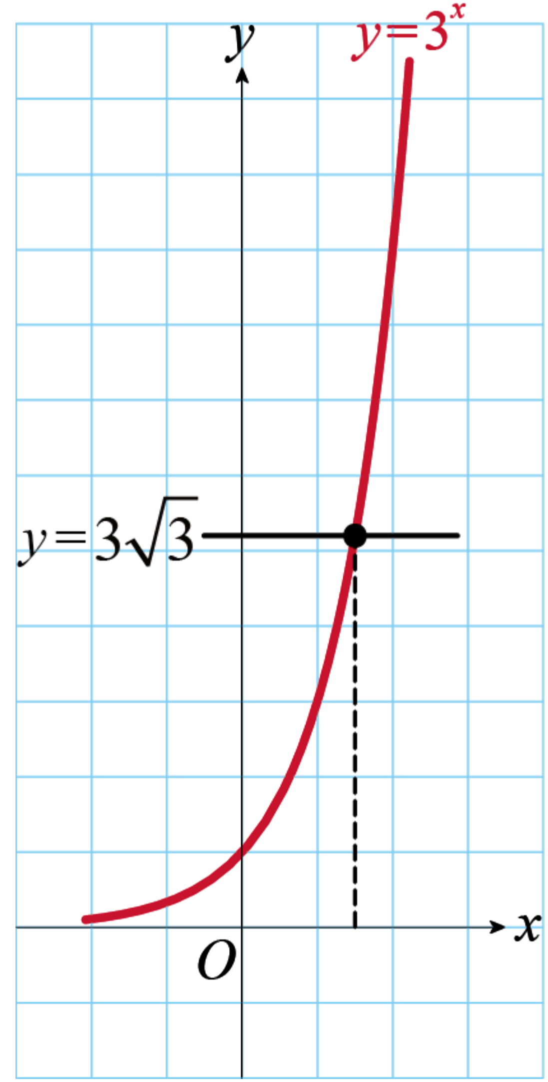


(a) $a>1$　(b) $0<a<1$

例題

4. 解下列各方程式：

(1) $3^x=3\sqrt{3}$ (2) $\left(\sqrt{3}\right)^{3x+1}=27\sqrt{3}$ (3) $9^x+3^{x+1}-18=0$



例題

4. 解下列各方程式：

(1) $3^{x}=3\sqrt{3}$ (2) $\left(\sqrt{3}\right)^{3x+1}=27\sqrt{3}$ (3) $9^{x}+3^{x+1}-18=0$

隨堂

解下列各方程式：

(1) $2^{\frac{x}{30}}=1024$ (2) $2^{3x^2}=4\times 2^{5x}$ (3) $4^{x+1}-9\times 2^{x}+2=0$

解：(1) 將方程式化為 $2^{\frac{x}{30}}=1024=2^{10}$

可得 $\dfrac{x}{30}=10$ ， 解得 $x=300$ 。

(2) 將方程式化為 $2^{3x^2}=2^2\times 2^{5x}=2^{5x+2}$

可得 $3x^2=5x+2$ ，

分解得 $(3x+1)(x-2)=0$ 。

解得 $x=\dfrac{-1}{3}$ 或 $x=2$ 。

隨堂

解下列各方程式：

(1) $2^{\frac{x}{30}}=1024$　(2) $2^{3x^2}=4\times2^{5x}$　(3) $4^{x+1}-9\times2^x+2=0$

解：

(3) 設 $t=2^x$。因為

$$4^{x+1}=\left(2^2\right)^x\times4^1=4\left(2^x\right)^2=4t^2 \text{ 且 } 9\times2^x=9t$$

所以方程式可化為 $4t^2-9t+2=0$

即$(4t-1)(t-2)=0$，解得$t=\frac{1}{4}$ 或 $t=2$ 。

①若$t=\frac{1}{4}$，即 $2^x=\frac{1}{4}=2^{-2}$，解得 $x=-2$。

②若 $t=2$，即 $2^x=2=2^1$，解得$x=1$。

得 $x=-2$或 $x=1$ 。

例題

5. 觀察 $y=0.3^{x}$ 的圖形，比較 $a=\sqrt{0.3}$，$b=(0.09)^{0.5}$，$c=\left(\frac{10}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 三數的大小關係。

隨堂

觀察 $y=2^x$ 的圖形，比較 $a=\sqrt{2}$， $b=\sqrt[3]{4}$ ，$c=\sqrt[4]{8}$ 三數的大小關係。

解：將以上三數都化成以2為底數的指數：

$$a=\sqrt{2}=(2)^{\frac{1}{2}}$$

$$b=\sqrt[3]{4}=\left((2)^2\right)^{\frac{1}{3}}=(2)^{\frac{2}{3}}$$

$$c=\sqrt[4]{8}=\left((2)^3\right)^{\frac{1}{4}}=(0.5)^{\frac{3}{4}}$$

因為 $y=2^x$ 是嚴格遞增函數(即 x 愈大，y 愈大) ，

所以 $c>b>a$。

例題

6. 解下列各不等式：

(1) $(0.7)^{x^2} > (0.49)^x$　　(2) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$

隨堂

解下列各不等式：

(1) $3^{2x+1}>\frac{1}{3}$　(2) $2^{1-2x}-9\times 2^{-x}+4\leq 0$

解：

(1)因為 $\frac{1}{3}=(3)^{-1}$，所以不等式可化為 $3^{2x+1}>(3)^{-1}$，

又因為 $3>1$，可知以3為底的指數函數

為嚴格遞增函數，所以 $2x+1>-1$，

解得 $x>-1$。

隨堂

解下列各不等式：

(1) $3^{2x+1} > \frac{1}{3}$ (2) $2^{1-2x} - 9 \times 2^{-x} + 4 \leq 0$

解：

(2) 設 $t = 2^{-x}$。因為

$$2^{1-2x} = 2^1 \times \left(2^{-x}\right)^2 = 2t^2 \quad 且 \quad 9 \times 2^{-x} = 9t$$

所以方程式可化為 $2t^2 - 9t + 4 \leq 0$

即 $(2t-1)(t-4) \leq 0$，解得 $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ 。

即 $2^{-1} \leq 2^{-x} \leq 2^2$ ，解得 $-1 \leq -x \leq 2$

即 $-2 \leq x \leq 1$ 。

來看一個按比例衰退的應用情形。

半衰期是指放射性物質衰變至原來數量的一半所需的時間

例如：碘131的半衰期為8天

表示該元素經過8天後，其數量會變為原來的 $\frac{1}{2}$

經過16天後（2個8天），其數量會變為原來的 $\frac{1}{4}$

一般而言，經過 x 天後（ $\frac{x}{8}$ 個8天），

其數量會變為原來的$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}$ 。

圖為國立臺灣博物館的左鎮人骨，
曾被誤測距今有兩、三萬年之久，
後來透過碳14的鑑定後，
才推翻了這個說法。

碳14定年法是考古學上常用的技術：
生物還活著時，因為呼吸作用，
所以體內的碳14數量大致不變；

當生物死去後，體內的碳14就會放射衰變減少。

考古學家們可利用這個衰變特性來推斷生物的死亡時間。

圖源：shutterstock

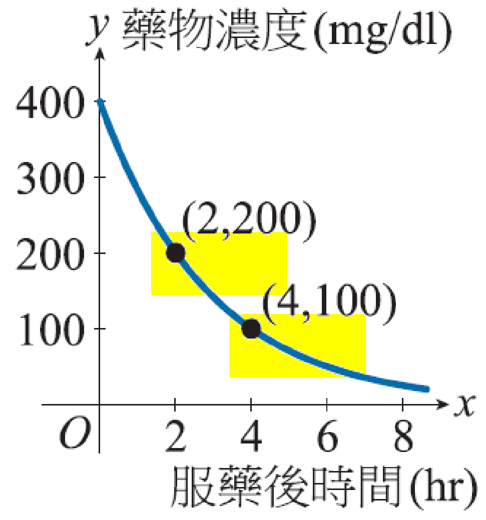
例題

7. 已知碳14的半衰期約為5700年，且該骨頭原來碳14的數量為 m，問：該人類死亡 x 年後，碳14的數量變為下列哪一個選項？

(1) $x\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{5700}}$ (2) $m\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5700}{x}}$ (3) $m\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5700}}$ (4) $x\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5700}{m}}$

隨堂

藥物在人體血液中的剩餘量會隨著時間遞減，且經過 x 小時後，血液中的藥物濃度為指數函數 $f(x)=ma^{x}$ 其中 m, a 是常數。已知右圖是 $y=f(x)$ 的部分圖形，求 m, a 的值。



解：

因為函數圖形通過點 $(2,200),(4,100)$，

所以代入函數得 $200=m\cdot a^{2}$ 與 $100=m\cdot a^{4}$。

將兩式相除，得 $a^{2}=\dfrac{100}{200}=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$，解得 $a=2^{-\frac{1}{2}}$，

再代回 $200=m\cdot a^{2}$，

得 $200=m\cdot\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{2}=m\times 2^{-1}$，解得 $m=400$。

再來看一個按比例成長的應用情形。
同學過年領到的壓歲錢常被存入銀行，而銀行常提供的利息計算方式有單利與複利兩種，這兩種的不同在於：

單利是將所獲得的利息與本金分開，
每期所領取的利息固定，如銀行的「存本取息」制；

複利則是把每期所獲得的利息加上本金，
一起當作下一期的本金，如「整存整付」制。

來看一個按比例成長的應用情形。
同學過年領到的壓歲錢常被存入銀行，而銀行常提供的利息計算方式有單利與複利兩種，這兩種的不同在於：

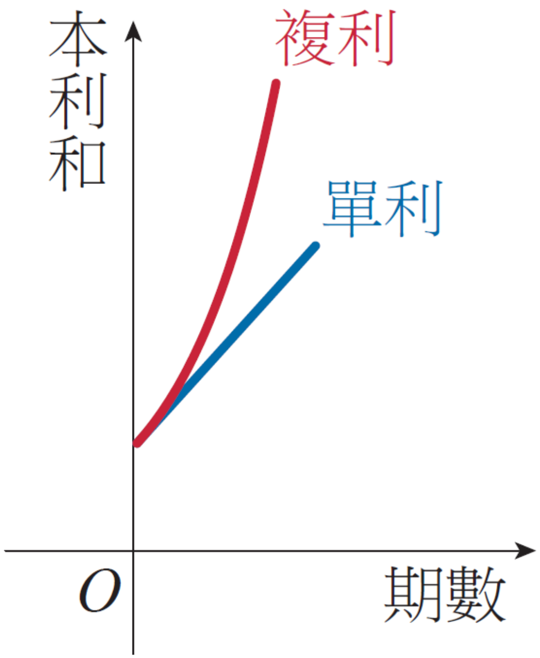
例如：某定存年利率為10%，已知本金為10萬元，以一年為一期，不同期數的本利和如下表（單位：萬元）。

時間	以單利計算本利和	以複利計算本利和
1年後	$10(1+10\%)=11$	$10(1+10\%)=11$
2年後	$10(1+10\%\times 2)=12$	$11\times(1+10\%)=10(1+0.1)^2=12.1$
3年後	$10(1+10\%\times 3)=13$	$12.1\times(1+10\%)=10(1+0.1)^3=13.31$
⋮	⋮	⋮
n年後	$10(1+10\%\times n)$	$10(1+0.1)^n$

來看一個按比例成長的應用情形。
同學過年領到的壓歲錢常被存入銀行，而銀行常提供的利息計算方式有單利與複利兩種，這兩種的不同在於：

以單利計算時，本利和隨著時間以線性成長；而以複利計算時，本利和隨著時間以指數成長，如圖所示。

愛因斯坦曾說：「複利的威力勝過原子彈！」不少信用卡的循環利率都是複利計算。指數成長的複利，其威力不容小覷。



來看一個按比例成長的應用情形。
同學過年領到的壓歲錢常被存入銀行，而銀行常提供的利息計算方式有單利與複利兩種，這兩種的不同在於：

一般而言，設本金為 P 元，每期的利率為 $r\,\%$，
單利與複利的本利和計算方法如下表：

時間	以單利計算的本利和	以複利計算的本利和
n 期後	$P(1+r\,\%\boxed{\cdot n})$	$P(1+r\,\%)^{\boxed{n}}$

例題

8. 某銀行推出青年創業優惠貸款方案如下：
貸款100萬元、年利率為3%、每年計息一次，十年後期滿一次還清本利和。
(1) 以單利計息，期滿還款時須還多少錢？
(2) 以複利計息，期滿還款時須還多少錢？
（四捨五入到整數位）

解：

隨堂

某銀行推出六年儲蓄專案如下：一次存100萬元、年利率為2.5%、每年計息一次，六年後期滿一次領回本利和時，複利計息比單利計息多領多少錢？(四捨五入到整數位）

解：六年後單利的本利和為：

$$100(1+2.5\%\times 6)=100(1+0.15)=115\text{（萬元）}。$$

六年後複利的本利和為：

$$100(1+2.5\%)^{6}=100(1.025)^{6}\text{（萬元）}。$$

利用計算機得 $100(1.025)^{6}$（萬元）≈ 1159693（元）

六年期滿領回本利和時：

複利計息比單利計息多領9693(元)

之前提到，複利的本利和會隨著時間以指數成長，
那麼如果是在一年內的計息次數愈多，
本利和會不會無上限的愈來愈大呢？

我們以本金1萬元、年利率100%的情形下，

以一年複利一次（此時利率為100%=1）、

每半年複利一次（此時利率為100%÷2=0.5）、

每季複利一次（此時利率為100%÷4=0.25）...，

一年後得到的本利和列出如下表（單位：萬元）。

之前提到，複利的本利和會隨著時間以指數成長，
那麼如果是在一年內的計息次數愈多，
本利和會不會無上限的愈來愈大呢？

計息週期（多久複利一次）	一年的期數 n	每期的利率 $\frac{100\%}{n}$	一年（n 期）的本利和 $1\times\left(1+\frac{100\%}{n}\right)^n$
一　年	1	$100\%=1$	$(1+1)^1=2$
半　年	2	$100\%\div 2=0.5$	$(1+0.5)^2=2.25$
一　季	4	$100\%\div 4=0.25$	$(1+0.25)^4\approx 2.4414$
一個月	12	$100\%\div 12\approx 0.0833$	$(1+0.0833)^{12}\approx 2.61207$
一　週	52	$100\%\div 52\approx 0.01923$	$(1+0.01923)^{52}\approx 2.69249$
一　天	365	$100\%\div 365\approx 0.00274$	$(1+0.00274)^{365}\approx 2.71484$
半　天	730	$100\%\div 730\approx 0.00137$	$(1+0.00137)^{730}\approx 2.71669$
一小時	8760	$100\%\div 8760\approx 0.000114155$	$(1+0.000114155)^{8760}\approx 2.71812$
一分鐘	525600	$100\%\div 525600\approx 0.00000190259$	$(1+0.00000190259)^{525600}\approx 2.71828$

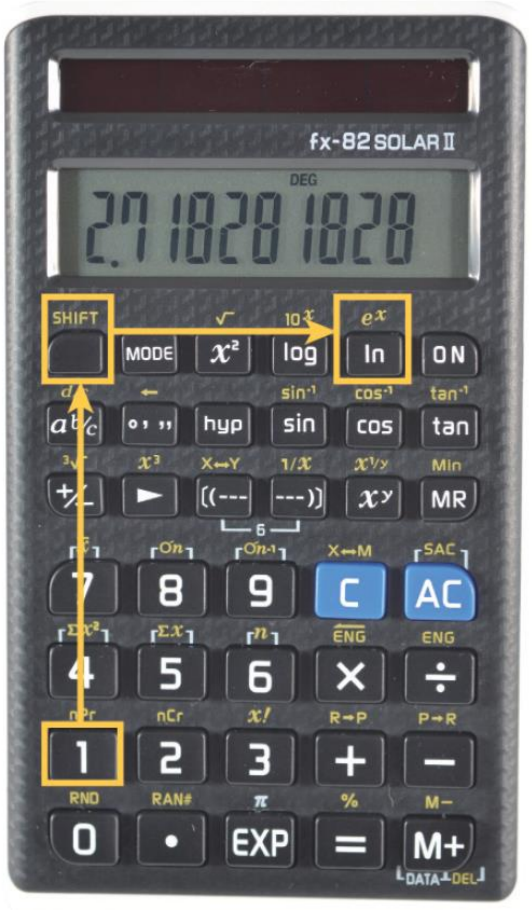
之前提到，複利的本利和會隨著時間以指數成長，那麼如果是在一年內的計息次數愈多，本利和會不會無上限的愈來愈大呢？

由上表可看到，計息次數愈多，本利和愈大，而且會大約趨近2.718…

事實上，當一年內計息次數愈來愈多次時，本利和並不會無上限的愈來愈大，而會趨近一個固定的常數，我們將這個常數記做 e。

利用計算機依序按下 1 SHIFT e^x

就可得到 $e \approx 2.718281828$

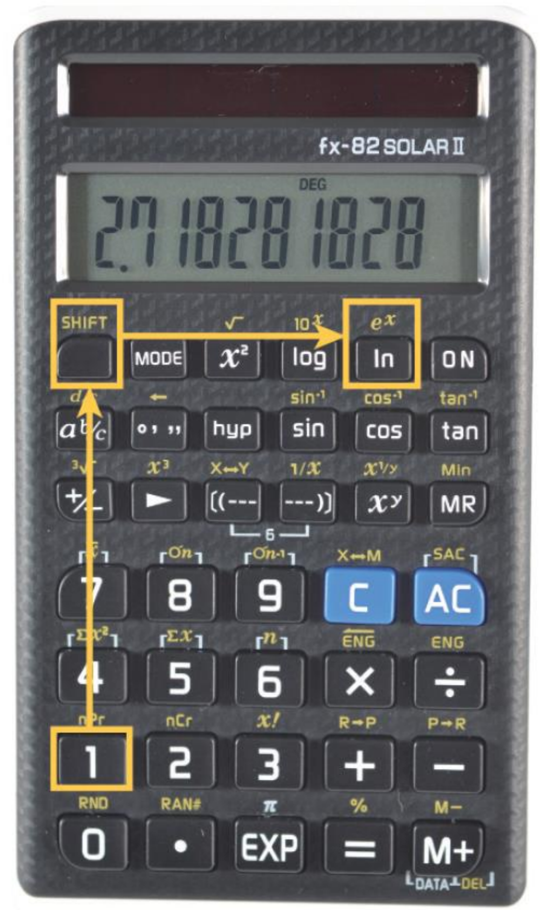


之前提到，複利的本利和會隨著時間以指數成長，那麼如果是在一年內的計息次數愈多，本利和會不會無上限的愈來愈大呢？

由計算機的畫面，看起來 e 似乎是循環小數，事實上，利用更複雜的方式可以得知 $e=2.718281828459045\cdots$，並可證明它是一個無理數。

它就像圓周率 π 一樣，是一個小數點後有無限多個數字且不循環的無理數。

歐拉是第一位使用 e 來表示這個常數的數學家，所以常數 e 又稱為「歐拉數」



單元5指數函數

本單元結束

2. Apples < 1000個.

拿走 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$, 但不能在切. 若有剩就依次給

問最多有 12 人可拿蘋果? 729個. 972個.

ex

Sol: $m\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{2}{3}\right)^q \in \mathbb{N}$. 求 $p+q$ 之 max.

$\Rightarrow 1000\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^p\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^q > m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^p\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^q \geq 1$

$\Rightarrow 1000 > 2^p\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^q = 2^{p-q}\cdot 3^q$

$\Rightarrow 1000 > 4^{\frac{p-q}{2}}\cdot 3^q > 3^{\frac{p-q}{2}}\cdot 3^q = 3^{\frac{p+q}{2}}$

$1000 > 3^{\frac{p+q}{2}}$.

$\Rightarrow 3^6 \geq 3^{\frac{p+q}{2}}$

$\therefore p+q \leq 12$